Investigación Operativa

Última actualización: 15 de octubre de 2026

Índice general

1 Introducción **1**

1.1 Un primer problema de programación lineal 1
1.2 Un problema más complicado. Añadimos dos variables más 3
1.3 Sistemas de ecuaciones lineales: distintas notaciones 6
1.3.1 Interpretación por columnas 6
1.3.2 Interpretación por filas 7
1.3.3 Compatibilidad y conjunto de soluciones 7
1.4 Inecuaciones y variables de holgura 7
1.5 Poliedros y forma estándar 8
1.5.1 Convexidad y vértices 9
1.5.2 Paso a la forma estándar 9
1.5.3 Un ejemplo geométrico 10
1.6 Soluciones básicas y vértices 11
1.7 Sistemas de ecuaciones equivalentes 13
1.8 Un ejemplo más. 14
1.9 Ejercicios 19

2 Algoritmo del Símplex **21**

2.1 Teorema Fundamental de la Programación Lineal 21
2.1.1 Una demostración constructiva del teorema fundamental 22
2.2 Descripción formal del método símplex 26
2.2.1 Solución factible básica inicial 26
2.2.2 La operación pivote 29
2.2.3 Detección de un problema no acotado 31
2.2.4 El algoritmo símplex en forma tabular 32
2.2.5 Un paso completo en el ejemplo anterior 32
2.2.6 Las fórmulas de pivote para una base cualquiera 33
2.2.7 Degeneración, empates y terminación 35

2.2.8 Cómo reconocer soluciones óptimas alternativas 35
2.3 Cómo obtener una base factible inicial 36
2.3.1 Método de las dos fases 36
2.3.2 Método de penalización o de la gran M 37
2.4 Resumen del algoritmo símplex 38
2.5 Matrices pivotantes 42
2.5.1 Un ejemplo 42
2.5.2 Definición y propiedades 45
2.5.3 Cálculo de los costes reducidos a partir de los datos originales . . 46
2.5.4 Incorporación de la función objetivo al sistema. OPCIONAL . . . 47
2.6 Degeneración, ciclaje y reglas anticiclaje 51
2.6.1 Un ejemplo de ciclaje 51
2.6.2 Perturbación lexicográfica del segundo miembro 52
2.6.3 Regla de Bland 53
2.7 Ejercicios 55
2.8 Ejercicios 61
2.9 Ejercicios 69

3 Apéndice **77**
3.1 Sistemas de ecuaciones equivalentes 77
3.2 Ejercicios 79

Capítulo 1

Introducción

1.1 Un primer problema de programación lineal

Antes de dar las definiciones formales, consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z(x_1, x_2) = -3x_1 - 4x_2, \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{array} \tag{P_1}$$

Resolver el problema significa encontrar, entre todos los puntos que cumplen simultáneamente las restricciones, uno en el que la función z (que llamaremos función objetivo) tome el menor valor posible. Resolver este tipo de problemas es el objetivo de esta asignatura. Este es un ejemplo muy sencillo que vamos a resolver gráficamente a continuación, pero en general, los problemas que se plantean tienen miles de variables y cientos de restricciones. Por tanto, se necesita un algoritmo para resolverlos. El método Símplex dado por el profesor Dantzig en 1947 será el que describamos aquí.

Para la resolución gráfica,

representemos el conjunto de puntos que verifican las restricciones. A este conjunto de puntos lo llamaremos *región factible*. Cada desigualdad determina un semiplano. La intersección de los cuatro semiplanos nos permite obtener dicha región. En este ejemplo es el polígono de vértices

$$(0,0), \qquad (4,0), \qquad (2,2), \qquad (0,3).$$

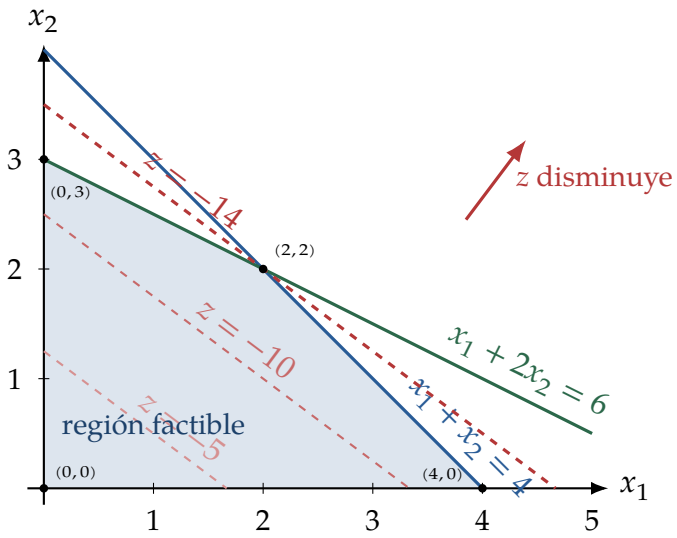


Figura 1.1: Región factible y algunas curvas de nivel de la función objetivo.

Las curvas de nivel de la función objetivo

Para cada número real c, la curva de nivel $z = c$ viene dada por

$$-3x_1 - 4x_2 = c,$$

Por tanto, las curvas de nivel son rectas paralelas. Al desplazarnos por ese haz de rectas, en la dirección en la que disminuye c, la última que toca a la región factible es $-3x_1 - 4x_2 = -14$ y lo hace en el punto $(2, 2)$. Así obtenemos la solución del problema. Además, $z(2, 2) = -3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -14$.

Vértice	Valor de z
$(0, 0)$	0
$(4, 0)$	-12
$(2, 2)$	-14
$(0, 3)$	-12

Idea que debemos retener

En el dibujo observamos que la solución se alcanza en un vértice de la región factible. Más adelante se formulará y demostrará con precisión el resultado que justifica esta observación y se aclararán las hipótesis necesarias.

Atención, pregunta

Esto se cuenta en bachillerato del siguiente modo. Se evalúa la función objetivo en los vértices (que previamente hay que calcular) y se toma como solución del problema aquel en el que se alcance el menor valor.
Para que este argumento sea correcto la región factible debe ser ...¿cómo?

1.2 Un problema más complicado. Añadimos dos variables más

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & z(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4, \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array} \qquad (P_2)$$

Tenemos las restricciones de signo de todas las variables y un sistema de ecuaciones. Un problema escrito de esta manera diremos que está en forma estándar. En este caso, la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El nuevo conjunto factible está contenido en $\mathbb{R}^4$, por lo que ya no podemos dibujarlo utilizando cuatro ejes coordenados sobre la pizarra. Sin embargo, las dos ecuaciones independientes hacen que esté contenido en un plano afín de dimensión 2 dentro de $\mathbb{R}^4$.

Elección de dos incógnitas y aplicación de la regla de Cramer

Tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas. Como el rango de la matriz de los coeficientes es dos, podemos elegir dos incógnitas correspondientes a un menor de orden dos con determinante no nulo y expresar las otras dos en función de ellas.

Elijamos x_1 y x_4 como incógnitas que queremos despejar. Las columnas correspondientes de A forman la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 1 \neq 0.$$

Por tanto, para cualquier elección de x_2 y x_3, el sistema determina de manera única x_1 y x_4. Podríamos aplicar directamente la regla de Cramer, pero antes haremos lo mismo que al resolver un sistema por reducción (para que la aplicación de Cramer sea trivial): Sustituimos la segunda ecuación por el resultado de restar la primera ecuación de la segunda,

Así obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8 \end{array} \xrightarrow{E_2 - E_1 \to E_2} \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array} \qquad (1.1)$$

Ahora las columnas de x_1 y x_4 forman la matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Definición 1.2.1. Diremos que el sistema está en *forma canónica* respecto de determinadas variables (a menudo simplemente 'en forma canónica') cuando las columnas asociadas a esas variables forman una submatriz identidad de orden igual al número de ecuaciones.

El trabajo para ejecutar Cramer ya está hecho. En efecto, pasando x_2 y x_3 al segundo miembro obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - x_2 + x_3 \\ 2 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicar ahora la regla de Cramer es inmediato, y resulta

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 6 - x_2 + x_3 \\ x_4 &= 2 - x_2 - 2x_3 \end{aligned} \qquad x_2, x_3 \in \mathbb{R}} \tag{1.2}$$

Estas ecuaciones describen un plano afín de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$.

Atención, pregunta

¿Qué valores sencillos podemos dar a x_2 y x_3 para obtener rápidamente un punto que satisfaga las cuatro restricciones de signo?

La elección más sencilla es

$$x_2 = x_3 = 0.$$

Al sustituir en (1.2), resulta

$$x_1 = 6, \qquad x_4 = 2.$$

Por tanto, hemos obtenido el punto factible

$$\bar{x} = (6, 0, 0, 2).$$

Probaremos que este punto es vértice del poliedro de soluciones factibles en R^4.

Por supuesto, podemos dar otros valores a las variables x_2 y x_3 para obtener soluciones factibles. ¿Cualquier combinación de valores vale? No. Toda combinación nos da un punto de R^4 que verifica el sistema, pero no todas nos llevan a puntos con sus coordenadas no negativas.

Atención, pregunta

Obtén todas esas combinaciones.

Aunque ya lo hice notar antes, quiero recalcar que las coordenadas positivas de $\bar{x}$ corresponden a columnas de la matriz identidad en la forma canónica 1.1.

Tomemos otra combinación de valores, por ejemplo, $x_2 = 2$ y $x_3 = 0$. Esta elección nos lleva a otra solución factible

$$\hat{x} = (4, 2, 0, 0).$$

Fijaos que en esta solución factible también hay dos variables que se anulan, pero en este caso las coordenadas positivas no se corresponden con vectores unidad en la matriz de los coeficientes. Sin embargo, también es un vértice de ese poliedro en $\mathbb{R}^4$.

El segundo punto también procede de una forma canónica

Y podemos encontrar una versión equivalente del sistema de ecuaciones en forma canónica, en la que los vectores unidad están en las posiciones 1 y 2. Usaremos la técnica de reducción en el sistema de ecuaciones:

Ahora queremos que las columnas correspondientes a x_1 y x_2 formen la matriz identidad.

$$\begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array} \quad \xrightarrow{E_1 - E_2 \to E_1} \quad \begin{array}{l} x_1 - 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array} \tag{1.3}$$

La matriz de los coeficientes es ahora

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Despejando las variables asociadas a la identidad,

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 4 + 3x_3 + x_4, \\ x_2 = 2 - 2x_3 - x_4. \end{array}} \tag{1.4}$$

Si anulamos las otras dos variables,

$$x_3 = x_4 = 0,$$

obtenemos inmediatamente

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 0, 0).$$

Es decir, el segundo vértice también se obtiene a partir de una forma equivalente del sistema de ecuaciones.

Resumen de la motivación

En este primer contacto han aparecido, todavía de manera informal, las ideas fundamentales del método símplex:

1. Las restricciones determinan un poliedro de puntos factibles.
2. En el problema bidimensional, las curvas de nivel permiten localizar gráficamente una solución en un vértice.

3. En problemas en forma estándar, mediante transformaciones elementales encontramos una versión equivalente del sistema de ecuaciones en forma canónica que permite resolver el sistema por Cramer de manera trivial.

4. Al anular las variables que funcionan como parámetros, las no despejadas, obtenemos un punto candidato. Si todas sus coordenadas son no negativas, el punto no solo es factible sino que resulta ser un vértice.

1.3 Sistemas de ecuaciones lineales: distintas notaciones

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas tiene la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Los coeficientes a_{ij} y los términos independientes b_i son números reales. Escribimos los vectores como columnas y definimos

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

El sistema se expresa, en *notación matricial*, mediante

$$Ax = b.$$

1.3.1 Interpretación por columnas

Denotamos por $A_j \in \mathbb{R}^m$ la columna j-ésima de A. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}, \qquad Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j.$$

Por tanto, resolver el sistema equivale a encontrar los coeficientes de una combinación lineal de las columnas de A que sea igual a b:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j A_j = b.$$

En particular, el sistema es compatible si y solo si

$$b \in \operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n\}.$$

1.3.2 Interpretación por filas

Denotamos por $a_i^{\mathrm{t}} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ la fila i-ésima de A, de modo que $a_i \in \mathbb{R}^n$ (es en realidad un vector, y por tanto, columna). El sistema también se escribe como

$$a_i^{\mathrm{t}} x = b_i, \qquad i = 1, \dots, m,$$

o, de forma desarrollada,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

La notación por filas destaca cada ecuación; la notación por columnas destaca cómo las variables combinan los vectores columna.

1.3.3 Compatibilidad y conjunto de soluciones

El criterio de Rouché–Frobenius establece que

$$Ax = b \text{ es compatible} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}.$$

Si x^0 es una solución particular, todas las soluciones son

$$x = x^0 + d, \qquad d \in \ker A, \qquad \ker A = \{d \in \mathbb{R}^n : Ad = 0\}.$$

En efecto, $Ax = b$ equivale a $A(x - x^0) = 0$. Así, un sistema compatible de rango r tiene un conjunto de soluciones afín de dimensión $n - r$. Su solución es única si y solo si $r = n$.

1.4 Inecuaciones y variables de holgura

Las desigualdades entre vectores se interpretan *componente a componente*. Por ejemplo,

$$Ax \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Una igualdad puede sustituirse por dos desigualdades:

$$a_i^{\mathrm{t}} x = b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_i^{\mathrm{t}} x \leq b_i, \\ a_i^{\mathrm{t}} x \geq b_i. \end{cases}$$

Además, $a_i^{\mathrm{t}} x \geq b_i$ equivale a $-a_i^{\mathrm{t}} x \leq -b_i$.

Proposición 1.4.1 (Introducción de una holgura)**.** *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$a_i^{\mathrm{t}} x \leq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } s_i \geq 0 \text{ tal que } a_i^{\mathrm{t}} x + s_i = b_i.$$

Cuando existe, el valor de s_i es único y viene dado por $s_i = b_i - a_i^{\mathrm{t}} x$.

Demostración. Si $a_i^t x \leq b_i$, definimos $s_i = b_i - a_i^t x$. Entonces $s_i \geq 0$ y $a_i^t x + s_i = b_i$. Recíprocamente, si $a_i^t x + s_i = b_i$ y $s_i \geq 0$, entonces

$$a_i^t x = b_i - s_i \leq b_i.$$

La propia igualdad determina de manera única s_i. □

Proposición 1.4.2 (Introducción de un exceso)**.** *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica*

$$a_i^t x \geq b_i \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } s_i \geq 0 \text{ tal que } a_i^t x - s_i = b_i.$$

En este caso, $s_i = a_i^t x - b_i$ es también único.

Demostración. Si se cumple la desigualdad, tomamos $s_i = a_i^t x - b_i \geq 0$. En sentido contrario, la igualdad implica $a_i^t x = b_i + s_i \geq b_i$. □

Definición 1.4.3. La variable no negativa que se añade a una restricción de tipo $\leq$ se llama *variable de holgura* (*slack*). La que se resta en una restricción de tipo $\geq$ se llama *variable de exceso* (*surplus*). También utilizaremos «variables de holgura» como denominación conjunta, indicando el signo correspondiente.

Observación

La equivalencia anterior debe entenderse con la expresión «existe s_i»: el sistema ampliado tiene una variable más. Sus soluciones no son los mismos vectores que las de la inecuación, aunque existe una correspondencia biyectiva entre ambos conjuntos.

La holgura mide la diferencia entre los dos miembros de la restricción. Una restricción se dice *activa* en un punto factible cuando se cumple con igualdad; esto sucede exactamente cuando su holgura o exceso es cero.

Ejemplo 1.4.4. La ecuación $3x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$ equivale a

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -5. \end{cases}$$

Por su parte, $x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4$ se transforma en

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + s_1 = 4, \qquad s_1 \geq 0.$$

Esta transformación no impone ninguna condición de signo adicional a x_1, x_2, x_3.

1.5 Poliedros y forma estándar

Definición 1.5.1. Un *poliedro* de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto que puede describirse mediante un número finito de desigualdades lineales no estrictas:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m.$$

Diremos que una representación está en *forma estándar* cuando es de la forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Una representación estándar también define un poliedro en el sentido anterior: basta sustituir cada igualdad por dos desigualdades y escribir $x \geq 0$ como $-x \leq 0$. Un poliedro puede ser vacío o no acotado. Un poliedro acotado se denomina *politopo*.

1.5.1 Convexidad y vértices

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es *convexo* si, para cualesquiera $u, v \in C$ y $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda u + (1-\lambda)v \in C.$$

Atención, pregunta

Todo poliedro es convexo. Demuéstralo.

Definición 1.5.2. Un punto $x \in \mathcal{P}$ es un *vértice* o *punto extremo* de $\mathcal{P}$ si no pertenece al interior de ningún segmento con extremos distintos en $\mathcal{P}$.

Atención, pregunta

Demuestra que un punto $x \in \mathcal{P}$ es un *vértice* de $\mathcal{P}$ si y sólo si se cumple que si

$$x = \lambda u + (1-\lambda)v, \quad u, v \in \mathcal{P}, \quad 0 < \lambda < 1,$$

entonces necesariamente $u = v = x$.

1.5.2 Paso a la forma estándar

Si las variables originales son no negativas, el sistema $Ax \leq b$ se transforma en

$$Ax + s = b, \qquad x \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Para

$$\mathcal{P} = \{x \geq 0 : Ax \leq b\}, \qquad \mathcal{Q} = \{(x,s) \geq 0 : Ax + s = b\},$$

la aplicación

$$\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}, \qquad \Phi(x) = (x, b - Ax)$$

es una biyección afín cuya inversa es la proyección $(x,s) \mapsto x$. Como ambas aplicaciones conservan las combinaciones convexas, x es vértice de P si y solo si $\Phi(x)$ es vértice de Q. La misma conclusión vale con restricciones mezcladas de tipo $\leq$ y $\geq$, utilizando holguras y excesos.

Si una variable x_j es libre de signo, puede sustituirse por

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \qquad x_j^+, x_j^- \geq 0.$$

Así, para variables originalmente libres, $Ax \leq b$ admite la formulación

$$Ax^+ - Ax^- + s = b, \qquad x^+, x^-, s \geq 0.$$

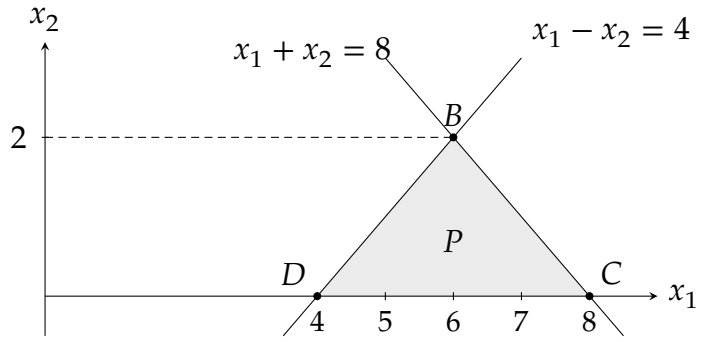
En esta transformación la representación de x *no es única*: sumar una misma cantidad no negativa a x_j^+ y a x_j^- no altera su diferencia. Por ello no debe atribuirse a esta sustitución la biyección ni la correspondencia de vértices de la transformación que solo añade holguras.

1.5.3 Un ejemplo geométrico

Consideremos el ejemplo de los apuntes:

$$\mathcal{P} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \leq & 8, \\ x_1 - x_2 & \geq & 4, \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}.$$

Es el triángulo de vértices $D = (4, 0)$, $B = (6, 2)$ y $C = (8, 0)$.



Introduciendo una holgura s_1 y un exceso s_2 obtenemos

$$\mathcal{P}' = \left\{ (x_1, x_2, s_1, s_2) \geq 0 : \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + s_1 & = & 8, \\ x_1 - x_2 - s_2 & = & 4 \end{array} \right\}.$$

Su matriz de coeficientes y su segundo miembro son

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La correspondencia entre ambos conjuntos es

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2, 8 - x_1 - x_2, x_1 - x_2 - 4).$$

Los vértices se transforman en

$$D' = (4, 0, 4, 0), \qquad B' = (6, 2, 0, 0), \qquad C' = (8, 0, 0, 4).$$

Las columnas de A' asociadas a sus coordenadas positivas son:

Punto	Índices positivos	Columnas correspondientes
D'	$1, 3$	$(1, 1)^t$, $(1, 0)^t$
B'	$1, 2$	$(1, 1)^t$, $(1, -1)^t$
C'	$1, 4$	$(1, 1)^t$, $(0, -1)^t$

En los tres casos las columnas son linealmente independientes. Cualquier otro punto de P' tiene al menos tres coordenadas positivas: x_1 es siempre positivo y, fuera de los tres vértices, al menos dos de las cantidades x_2, s_1, s_2 son positivas. Como las columnas están en $\mathbb{R}^2$, esas tres o más columnas son dependientes. Esta observación motiva el siguiente apartado.

1.6 Soluciones básicas y vértices

Consideremos

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad \operatorname{rg}(A) = m.$$

La hipótesis significa que las m filas de A son linealmente independientes; en particular, $m \leq n$.

Definición 1.6.1 (Base y solución básica factible)**.** Una *base* de A es una selección de m de sus columnas, $A_{i_1}, \ldots A_{i_m}$ linealmente independientes. la matriz cuadrada $B' = A_B$ formada por esas columnas es no singular.

Denotando por x'_B a la parte de un punto x que se corresponde con esas columnas y x'_D al resto del vector, la *solución básica asociada* a esta base B' es

$$x_{B'} = B'^{-1}b, \qquad x_{D'} = 0.$$

A las variables en $x_{B'}$ las llamamos *'básicas'* y a las que están en $x_{D'}$, *'no básicas'*.

La solución básica así definida se dirá *factible básica* si $B'^{-1}b \geq 0$. En ese caso, diremos que B' es una *base factible.*

Observación

Se sigue inmediatamente que el sistema de ecuaciones $A'x = b'$, donde $A' = B'^{-1}A$ y $b' = B'^{-1}b$, está escrito en forma canónica. Concretamente, $A'_{B'} = I_m$.
La aplicación de la regla de Cramer con un sistema así es muy sencilla. Basta con despejar cada una de las m variables básicas en sus respectivas ecuaciones y el sistema estará resuelto.

Observación

Una solución básica puede tener coordenadas negativas. Por eso es necesario distinguir entre *solución básica* y *solución básica factible*.

Definición 1.6.2. Sea x una solución del sistema de ecuaciones. Se denomina soporte de x al siguiente conjunto de índices

$$\operatorname{supp}(x) = \{j : x_j \neq 0\}$$

Si $x \in \mathcal{P}$, $\operatorname{supp}(x) = \{j : x_j > 0\}$. Katta Murty dice que estos son los índices que «usa» el punto x; en ocasiones emplearemos esta terminología.

Proposición 1.6.3 (Caracterización por el soporte)**.** *Sea x una solución del sistema de ecuaciones. Se tiene que es una solución básica si y solo si las columnas $\{A_j : j \in \operatorname{supp}(x)\}$ son linealmente independientes.*

Demostración. Si x corresponde a una base, todas sus coordenadas no básicas son cero. Las columnas de su soporte forman un subconjunto de la base y, por tanto, son independientes.

Recíprocamente, si esas columnas son independientes, se pueden completar con columnas de A hasta formar una base B, porque $\operatorname{rg}(A) = m$. Todas las coordenadas fuera de esa base son cero y $Ax = b$ implica $Bx_B = b$. Por tanto, $x_B = B^{-1}b$. □

Corolario 1.6.4. *Un punto $x \in \mathcal{P}$ es una solución básica factible si y solo si las columnas $\{A_j : j \in \text{supp}(x)\}$ son linealmente independientes.*

Definición 1.6.5. Una solución básica factible es *degenerada* si alguna de sus variables básicas es cero, o, equivalentemente, si tiene menos de m coordenadas positivas.

Corolario 1.6.6. *Un punto $x \in \mathcal{P}$ no degenerado tiene una única forma canónica asociada. Sin embargo, si es degenerada puede tener varias.*

Observación

(A fuerza de ser pesado ...) Las soluciones factibles básicas son las soluciones que se obtienen a partir de formas canónicas del modo que se indica en la definición 1.6.1.

Teorema 1.6.7. *Un punto $x \in \mathcal{P}$ es un vértice si y solo si es una solución básica factible.*

Demostración. Supongamos primero que las columnas de su soporte son dependientes. Existe $d \neq 0$ tal que $Ad = 0$ y $d_j = 0$ fuera del soporte. Podemos elegir $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que

$$x + \varepsilon d \geq 0, \qquad x - \varepsilon d \geq 0.$$

Por ejemplo, basta tomar $\varepsilon < \min_{d_j \neq 0} x_j/|d_j|$. Ambos puntos pertenecen a P, son distintos y su punto medio es x. Por tanto, x no es vértice.

Supongamos ahora que las columnas del soporte son independientes y que

$$x = \lambda u + (1-\lambda)v, \qquad u, v \in P, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Si $x_j = 0$, la no negatividad de u_j, v_j obliga a que $u_j = v_j = 0$. Por tanto, $u - v$ se anula fuera del soporte de x. Además,

$$A(u - v) = 0.$$

La independencia de las columnas del soporte implica $u - v = 0$. De aquí $u = v = x$, de modo que x es vértice. La proposición anterior completa la equivalencia. □

Observación

La caracterización de los vértices por la independencia de las columnas del soporte no necesita rango completo por filas: su demostración sigue siendo válida. Para utilizar bases cuadradas de orden m, eliminaremos primero las ecuaciones redundantes de un sistema compatible. Veremos cómo hacer esto más adelante.

Observación

Todo parece indicar que si un problema de programación lineal tiene solución, una de ellas se encuentra entre los vértices del poliedro de soluciones factibles. Más adelante demostraremos que eso es así. Es el teorema fundamental de la programación lineal.
La proposición anterior nos lleva por el camino del algoritmo del símplex. Sólo necesitamos considerar formas canónicas (son finitas) para resolver el problema.

Queda determinar cómo nos movemos entre ellas.

1.7 Sistemas de ecuaciones equivalentes

Definición 1.7.1. Dos sistemas con las mismas incógnitas son *equivalentes* si tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.7.2. *Si $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es invertible, los sistemas*

$$Ax = b \qquad y \qquad MAx = Mb$$

son equivalentes.

Demostración. Multiplicando el primer sistema por M se obtiene el segundo. Para recuperar el primero basta multiplicar por M^{-1}. □

Teorema 1.7.3. *Sean $A, \widehat{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $\operatorname{rg}(A) = m$, y sean $b, \hat{b} \in \mathbb{R}^m$. Si los sistemas*

$$Ax = b, \qquad \widehat{A}x = \hat{b}$$

son equivalentes, existe una única matriz invertible $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que

$$\widehat{A} = MA, \qquad \hat{b} = Mb.$$

Demostración. Tras reordenar las variables, si es necesario, podemos suponer que las primeras m columnas de A forman una matriz invertible B. Escribimos

$$A = \begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}, \qquad \widehat{A} = \begin{pmatrix} \hat{B} & \widehat{C} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Al imponer $v = 0$, el primer sistema tiene exactamente una solución, $u = B^{-1}b$. Por equivalencia, $\hat{B}u = \hat{b}$ también tiene exactamente una solución. Como $\hat{B}$ es cuadrada, es invertible y

$$\hat{B}B^{-1}b = \hat{b}.$$

Para cualquier $v \in \mathbb{R}^{n-m}$, el vector

$$u = B^{-1}(b - Cv)$$

resuelve el primer sistema y, por equivalencia, también el segundo. Sustituyendo,

$$\hat{B}B^{-1}(b - Cv) + \widehat{C}v = \hat{b}.$$

Al cancelar los términos independientes resulta

$$(\widehat{C} - \hat{B}B^{-1}C)v = 0 \qquad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Luego $\widehat{C} = \hat{B}B^{-1}C$. Si $n = m$, este bloque no existe y basta la igualdad correspondiente a B. En cualquier caso,

$$M = \hat{B}B^{-1}$$

es invertible y verifica $MA = \widehat{A}$ y $Mb = \hat{b}$. Es única porque la igualdad $MB = \hat{B}$ obliga a que $M = \hat{B}B^{-1}$. □

Esta prueba utiliza únicamente una base de columnas y la expresión de las variables básicas en función de las restantes, por lo que conecta directamente con el método símplex.

Para un sistema compatible de rango $r < m$, se pueden conservar r ecuaciones independientes y eliminar las restantes: estas son combinaciones lineales de las elegidas, también en sus términos independientes. Esto último se comprueba evaluando la combinación en una solución particular. Así se obtiene una representación con rango completo por filas.

Corolario 1.7.4 (Representación asociada a una base)**.** *Si B es una base de A, entonces*

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad B^{-1}Ax = B^{-1}b.$$

Al separar las columnas básicas de las no básicas, la representación queda

$$x_B + B^{-1}A_D x_D = B^{-1}b.$$

Las columnas básicas forman la identidad y la solución básica se obtiene tomando $x_{\mathcal{N}} = 0$.

Observación

Multiplicar por una matriz invertible conserva un sistema de *ecuaciones*. No conserva, en general, un sistema de *inecuaciones* con el mismo sentido de desigualdad. Por ejemplo, $x \leq 1$ no equivale a $-x \leq -1$. Para desigualdades hay que controlar el signo de las operaciones.

1.8 Un ejemplo más.

Antes de describir formalmente el método símplex, resolveremos un problema sencillo. El objetivo no es todavía presentar el algoritmo con toda su terminología, sino descubrir la lógica que hay detrás de cada paso.

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ & x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 10. \\ & x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, 5. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Una solución factible inicial

El sistema de ecuaciones ya está en forma canónica respecto de las variables x_1 y x_5, pues las columnas correspondientes forman la matriz identidad.

Más adelante, estudiaremos cómo llegar a esta situación. Concretamente, usaremos el propio algoritmo para ello.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Las columnas correspondientes a x_1 y x_5 forman ahora la matriz identidad. Si anulamos las restantes variables,

$$x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

obtenemos una solución factible básica inicial.

$$\bar{x} = (8, 0, 0, 0, 10), \qquad z(\bar{x}) = 44.$$

Podemos despejar las variables x_1 y x_5 (regla de Cramer) para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4, \\ x_5 &= 10 - x_2 + 2x_3 - 2x_4. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Sustituyendo estas expresiones en la función objetivo, resulta

$$\begin{aligned} z(x) &= 3\,(8 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4) + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2\,(10 - x_2 + 2x_3 - 2x_4) \\ &= 44 - 6x_2 - x_3 - 15x_4. \end{aligned} \tag{1.7}$$

En esta igualdad x representa una solución cualquiera del sistema de ecuaciones. Además, contiene una información fundamental. En la solución inicial se tiene $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Dado que $z(\bar{x}) = 44$, si conseguimos una solución factible x en la que cualquiera de esas variables tome un valor positivo, el valor de z disminuirá y, por tanto, habremos mejorado la solución inicial. Y si además, esa solución factible x fuera básica, habríamos encontrado otro vértice que mejora al anterior.

Cómo movernos hacia ese nuevo vértice

Para imitar la clase de movimientos que realizará el método símplex, vamos a imponer provisionalmente dos reglas:

1. Solo una de las variables x_2, x_3, x_4, que ahora son nulas, pasará a ser positiva.
2. La nueva solución tendrá, como máximo, dos coordenadas positivas, pues el sistema tiene dos ecuaciones independientes.

De los ejemplos que hemos visto anteriormente se deduce que para resolver este problema basta con analizar la función objetivo z en los vértices del poliedro, esto es, en las soluciones factibles básicas. En este problema, para tener soluciones factibles básicas, solo dos variables pueden ser positivas. Los vectores columna de la matriz de los coeficientes tienen dos coordenadas. Para cambiar a otra solución factible básica, Dantzig decidió hacerlo de la siguiente manera: En la nueva solución, solo una de las variables no básicas en la solución actual será positiva (y por tanto, una de sus variables básicas tendrá que anularse). Esto no significa que ésta sea la única manera de moverse entre las soluciones factibles básicas, pero es el modo más sencillo.

Primera posibilidad: hacemos positiva a x_2

Tomamos

$$x_2 = \lambda, \qquad x_3 = x_4 = 0, \qquad \lambda \geq 0.$$

De (1.6) obtenemos

$$x_1 = 8 - 2\lambda, \qquad x_5 = 10 - \lambda.$$

Para que estas variables sean no negativas, es necesario que

$$\lambda \leq 4, \qquad \text{y} \qquad \lambda \leq 10.$$

Siguiendo las reglas anteriores, $\lambda = 4$ nos lleva a

$$x^{(1)} = (0, 4, 0, 0, 6), \qquad z(x^{(1)}) = 20.$$

Esto es, el valor de λ elegido es el más pequeño que hace que una de las dos variables x_1 o x_5 se anule.

Segunda posibilidad: hacemos positiva a x_3

Tomamos ahora

$$x_3 = \lambda, \qquad x_2 = x_4 = 0, \qquad \lambda \geq 0.$$

Entonces
Para $\lambda = 4$ obtenemos

$$x^{(2)} = (0, 0, 4, 0, 18)\,, \qquad z(x^{(2)}) = 40.$$

Tercera posibilidad: hacemos positiva a x_4

Finalmente, tomamos

$$x_4 = \lambda, \qquad x_2 = x_3 = 0, \qquad \lambda \geq 0.$$

En este caso,

$$x^{(4)} = (0, 0, 0, 8/3, 14/3), \qquad z(x^{(4)}) = 4.$$

Las tres alternativas pueden resumirse en la tabla siguiente:

Variable que aumenta	$\lambda_{\max}$	Nueva solución	Nuevo valor de z	Descenso de z
x_2	3	$(0,4,0,0,6)$	20	24
x_3	4	$(0,0,4,0,18)$	40	4
x_4	8/3	$(0,0,0,8/3,14/3)$	4	40

Las tres elecciones producen una mejora. Elegiremos la que proporciona el mayor descenso de la función objetivo, es decir, haremos positiva a x_4. Por cierto, esta no es la elección que propone Dantzig. Así pasamos de

$$\bar{x} = (8,0,0,0,10) \qquad \text{a} \qquad \hat{x} = (0,0,0,8/3,14/3).$$

En la terminología que introduciremos más adelante, x_4 entra en la base y x_1 sale de ella.

En esto consiste un paso del algoritmo. Sin embargo, en general no calcularemos esos descensos para cada una de las variables no básicas, sino que elegiremos una de ellas y para esa haremos ese cálculo.

Solo queda escribir una forma canónica (en este caso es única) asociada al nuevo vértice. Para ello, a partir del sistema de ecuaciones E_1', E_2':

$$E_1' = \frac{1}{3}E_1, \qquad E_2' = E_2 - \frac{2}{3}E_1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 &= \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{10}{3}x_3 + x_5 &= \frac{14}{3} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Finalmente, resolvemos por Cramer usando este último sistema:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}2x_3 \\ x_5 &= \frac{14}{3} + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{10}{3}x_3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

que nos lleva al vértice encontrado $\hat{x} = (0,0,0,8/3,14/3)$ tomando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Además, podemos calcular el valor de z en cualquier solución $x \in \mathcal{P}$ en función de las variables x_1, x_2 y x_3, sustituyendo las expresiones encontradas para las variables x_4 y x_5 en la definición de z : Se obtiene:

$$z(x) = z(\hat{x}) + 5x_1 + 4x_2 + 9x_3. \tag{1.10}$$

Cada punto $x \in \mathcal{P}$ distinto de $\hat{x}$, tiene que tener al menos una de las tres primeras coordenadas no nulas y, por tanto, el valor de z en él será mayor que $z(\hat{x})$. Por tanto, hemos encontrado la solución óptima.

Las mismas cuentas en forma de cuadro

El problema original puede recogerse en el cuadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
E_1	1	2	2	3	0	8
E_2	0	1	-2	2	1	10

La primera forma canónica:

variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	2	3	0	8
x_5	0	1	-2	2	1	10
z	0	-6	-1	-15	0	44

La última fila representa la igualdad

$$z = 44 - 6x_2 - x_3 - 15x_4.$$

Por ejemplo, si aumentamos x_4, su coeficiente -15 indica que cada unidad de aumento produce un descenso de 15 unidades en z. La primera fila muestra que x_4 puede aumentar hasta $8/3$, porque entonces x_1 llega a cero. El descenso total es, por tanto,

$$15 \cdot \frac{8}{3} = 40.$$

Estas son exactamente las cuentas realizadas anteriormente, ahora organizadas en un cuadro.

Después de seleccionar como variables de entrada a x_4 y salida a x_1, obtenemos el nuevo cuadro:

variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	$1/3$	$2/3$	$2/3$	1	0	$8/3$
x_5	$-2/3$	$-1/3$	$-10/3$	0	1	$14/3$
z	5	4	9	0	0	4

En la solución asociada a este cuadro se anulan las variables no básicas,

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

y se obtiene

$$\hat{x} = (0, 0, 0, 8/3, 14/3), \qquad z(\hat{x}) = 4.$$

La expresión (1.10) permite reconocer inmediatamente que esta solución es óptima. En efecto, para cualquier solución factible se tiene $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ y, por tanto,

$$z(x) = 4 + 5x_1 + 4x_2 + 9x_3 \geq 4.$$

Como $\hat{x}$ alcanza ese valor, concluimos que

$$\boxed{\hat{x} = (0, 0, 0, 8/3, 14/3) \quad \text{es una solución óptima y} \quad z^* = 4.}$$

Qué hemos hecho

Sin haber formulado todavía el algoritmo, hemos realizado sus operaciones fundamentales:

1. Partimos de una solución básica factible.
2. Identificamos las variables básicas y las no básicas. Resolvemos por Cramer despejando las variables básicas y escribimos la función objetivo en términos de las variables no básicas.
3. Esa expresión nos índica qué variable no básica hay que hacer positiva en la búsqueda de otra solución factible que mejore a la actual.
4. Determinamos qué valor debe tomar esa variable no básica seleccionada para que se anula alguna de las variables básicas actuales para obtener un nuevo vértice.
5. Así cambiamos de base y obtenemos una nueva solución básica factible.

El método símplex sistematiza exactamente este procedimiento.

1.9 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Escriba el sistema $2x_1 - x_2 + x_3 = 3$, $x_1 + 2x_2 = 1$ en notación matricial, por filas y por columnas. Determine su conjunto de soluciones.

Ejercicio 1.2. Transforme en forma estándar el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \end{cases} \qquad x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ libre.}$$

Indique cómo recuperar las variables originales a partir de una solución del sistema ampliado.

Ejercicio 1.3. En el ejemplo del triángulo, calcule la imagen de $(5, 0)$ en P' y compruebe que no es una solución básica factible. Identifique sus restricciones activas.

Ejercicio 1.4. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = (1, 0)^{\mathsf{t}}$. Encuentre dos bases distintas que produzcan la misma solución básica factible. Compruebe que es degenerada.

Capítulo 2

Algoritmo del Símplex

2.1 Teorema Fundamental de la Programación Lineal

Consideremos el problema de programación lineal en forma estándar

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z(x) = c^{\mathrm{t}}x, \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ y $\mathrm{rg}(A) = m$.

El método símplex recorre soluciones básicas factibles, es decir, vértices del poliedro

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\},$$

tratando de mejorar en cada paso el valor de la función objetivo.

Demostremos por fin el resultado que justifica que el método símplex centre su búsqueda en los vértices del poliedro.

Teorema 2.1.1 (Teorema fundamental de la programación lineal)**.** *Si el problema* (2.1) *tiene una solución óptima, entonces tiene una solución óptima básica factible.*

Demostración. Sea x^* una solución óptima. Entre todas las soluciones óptimas, elegimos una con el menor número de variables positivas. Sea $J = \mathrm{supp}(x^*)$. Probaremos que las columnas

$$A_j : j \in J$$

son linealmente independientes.

Si no lo fueran, existirían escalares $d_j, j \in J$, no todos nulos, alguno positivo, tales que

$$\sum_{j\in J} d_j A_j = 0$$

Definiendo $d_j = 0$ si $j \notin J$, obtenemos un vector $d \in \mathbb{R}^{\mathbb{n}}$, tal que $Ad = 0$. Además, podríamos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que los dos puntos

$$x^* + \varepsilon d \qquad \text{y} \qquad x^* - \varepsilon d$$

serían puntos del poliedro de soluciones factibles. Como suponemos que x^* es óptimo, $z(d) = 0$, pues, de lo contrario, una de las dos direcciones disminuiría el valor de la función objetivo.

Por otra parte, existe un valor de ϵ, digamos ϵ_0, tal que $x^* + \epsilon_0 d \in \mathcal{P}$ y $x_j^* + \epsilon_0 d_j = 0$, para algún $j \in J$,

Atención, pregunta

¿Por qué?

llegando pues a una contradicción pues x^* era la solución óptima con un menor número de variables positivas.

Por tanto, las columnas asociadas al soporte de x^* son linealmente independientes.

Deducimos pues que x^* es una solución básica factible. □

El teorema no afirma que toda solución óptima sea un vértice. Puede ocurrir, por ejemplo, que la función objetivo sea constante sobre una arista. Lo que garantiza es que, si hay soluciones óptimas, al menos una de ellas es una solución básica factible.

Corolario 2.1.2. *Si el problema* (2.1) *tiene una solución factible, entonces tiene una solución factible básica.*

Atención, pregunta

Demuéstralo.

2.1.1 Una demostración constructiva del teorema fundamental

La demostración anterior garantiza la existencia de una solución óptima básica factible. El siguiente ejercicio proporciona una demostración alternativa y, además, describe un procedimiento para obtener una solución básica factible a partir de cualquier solución factible.

Ejercicio 2.1 (Demostración constructiva del teorema fundamental)**.** Sea

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Si $\mathcal{P} \neq \emptyset$, a partir de cualquier punto $x \in \mathcal{P}$ se puede construir, en un número finito de pasos, una solución básica factible.

b) Si se parte de una solución óptima del problema

$$\text{minimizar} \qquad c^t x \qquad \text{sujeto a} \qquad x \in \mathcal{P},$$

el procedimiento del apartado anterior puede realizarse de modo que todos los puntos obtenidos sigan siendo óptimos. Concluya que, si el problema tiene solución óptima, tiene una solución óptima básica factible.

Solución. Tomemos $x \in \mathcal{P}$ y denotemos por

$$J = \operatorname{supp}(x) = \{j : x_j > 0\}$$

el soporte de x. Si las columnas A_j, $j \in J$, son linealmente independientes, la caracterización mediante el soporte nos dice que x ya es una solución básica factible.

Supongamos, por el contrario, que esas columnas son linealmente dependientes. Existen entonces escalares v_j, $j \in J$, no todos nulos, tales que

$$\sum_{j \in J} v_j A_j = 0.$$

Definimos $v_j = 0$ para $j \notin J$. De este modo, $v \neq 0$, $Av = 0$ y el soporte de v está contenido en el de x. Sustituyendo v por $-v$ si fuera necesario, podemos suponer que algún v_j es positivo.

Consideremos la recta

$$x(t) = x + tv, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Como $Av = 0$, todos sus puntos satisfacen las ecuaciones:

$$Ax(t) = Ax + tAv = b.$$

Por tanto, solo hay que determinar para qué valores de t se conserva la no negatividad. Sean

$$J_+ = \{j \in J : v_j > 0\}, \qquad J_- = \{j \in J : v_j < 0\},$$

y definamos

$$t_- = \max_{j \in J_+} \left\{ -\frac{x_j}{v_j} \right\} < 0,$$

así como

$$t_+ = \begin{cases} \min\limits_{j \in J_-} \left\{ -\dfrac{x_j}{v_j} \right\}, & \text{si } J_- \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{si } J_- = \emptyset. \end{cases}$$

Se tiene $t_+ > 0$ cuando es finito. Si denotamos por

$$I = \begin{cases} [t_-, t_+], & \text{si } J_- \neq \emptyset, \\ [t_-, +\infty), & \text{si } J_- = \emptyset, \end{cases}$$

entonces

$$x(t) \in \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad t \in I.$$

En efecto, si $v_j > 0$, la condición $x_j + tv_j \geq 0$ equivale a $t \geq -x_j/v_j$; si $v_j < 0$, equivale a $t \leq -x_j/v_j$; y, cuando $v_j = 0$, no impone ninguna restricción adicional. Fuera de J, tanto x_j como v_j son cero.

Puesto que el máximo que define t_- se alcanza, existe al menos un índice $k \in J_+$ para el cual

$$x_k(t_-) = x_k + t_- v_k = 0.$$

Así, $x(t_-)$ es factible y

$$\operatorname{supp}(x(t_-)) \subsetneq \operatorname{supp}(x).$$

Si las columnas asociadas a este nuevo soporte siguen siendo dependientes, repetimos el mismo razonamiento. En cada paso disminuye estrictamente el número de coordenadas positivas; por consiguiente, el proceso termina después de un número finito de pasos. En el punto final, las columnas correspondientes al soporte son linealmente independientes y, por tanto, hemos obtenido una solución básica factible. Esto prueba el apartado a).

Supongamos ahora que el punto de partida x es óptimo. Como $t_- < 0$ y existen valores positivos de t para los que $x(t)$ es factible, la optimalidad de x obliga a que

$$c^{\mathrm{t}} v = 0.$$

En efecto, si $c^{\mathrm{t}} v > 0$, el punto $x(t_-)$ tendría un valor objetivo menor que x; si $c^{\mathrm{t}} v < 0$, bastaría tomar un $t > 0$ suficientemente pequeño para obtener también una mejora. Ambas posibilidades contradicen la optimalidad de x.

Por tanto,

$$c^{\mathrm{t}} x(t) = c^{\mathrm{t}} x + t\, c^{\mathrm{t}} v = c^{\mathrm{t}} x$$

para todo $t \in I$. En particular, $x(t_-)$ sigue siendo óptimo. Al repetir el procedimiento, el soporte disminuye sin abandonar el conjunto de soluciones óptimas, hasta alcanzar una solución óptima básica factible. Esto prueba el apartado b). □

Idea que debemos retener

El procedimiento consiste en desplazarse por una dirección v que no altera las ecuaciones, hasta que una coordenada positiva se anula. Cada desplazamiento reduce estrictamente el soporte. Si el punto de partida es óptimo, la función objetivo permanece constante a lo largo de la dirección elegida.

Ejemplo 2.1.3 (Búsqueda constructiva de un vértice)**.** Consideremos el poliedro

$$x_1 + x_2 + \leq 3,\ 2x_1 + x_2 \leq 5,\ x_1 + 2x_2 \leq 5,\ x_1, x_2 \geq 0. \tag{2.2}$$

Una vez introducidas las variables de holguras, la matriz del sistema de ecuaciones resultante y el término independiente son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Partimos de la solución factible

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right)^{\mathrm{t}}.$$

No es una solución básica factible: sus cinco coordenadas son positivas y, por tanto, las cinco columnas de su soporte no pueden ser linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

Tomamos

$$v = (1, 1, -2, -3, -3)^{\mathrm{t}}.$$

Se comprueba inmediatamente que $Av = 0$. Por ello, todos los puntos de la recta

$$x(t) = \bar{x} + tv = \left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2} + t, 2 - 2t, \frac{7}{2} - 3t, \frac{7}{2} - 3t \right)^{\mathrm{t}}$$

satisfacen las tres ecuaciones. Las condiciones de no negatividad equivalen a

$$-\frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

En el extremo negativo del intervalo obtenemos

$$x\left(-\frac{1}{2} \right) = (0, 0, 3, 5, 5)^{\mathrm{t}}.$$

Las columnas asociadas a sus coordenadas positivas son A_3, A_4, A_5, que forman la matriz identidad. En consecuencia, $x(-1/2)$ es una solución básica factible. En la proyección sobre el plano de las variables originales, hemos pasado del punto interior $(1/2, 1/2)$ al vértice $(0, 0)$.

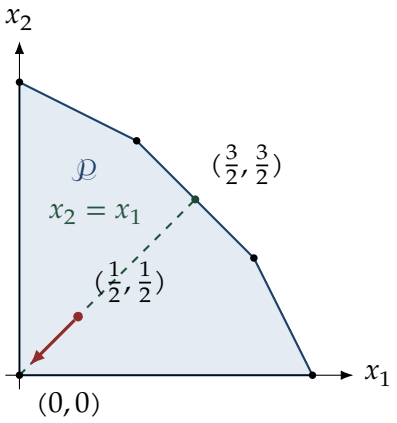


Figura 2.1: Desplazamiento desde un punto factible no básico hasta un vértice.

2.2 Descripción formal del método símplex

Retomamos el problema de programación lineal 2.1.

Recordemos que una *base* factible de A es cualquier sistema de m de sus vectores columnas linealmente independientes,

$$A_{i_1}, \dots A_{i_m} \text{ tal que } B'^{-1}b \geq 0,$$

donde B' es la matriz cuadrada formada por esas columnas. La *solución básica factible asociada* a esta base B' es el punto $x \in \mathcal{P}$ definido por

$$x_{B'} = B'^{-1}b, \qquad x_{D'} = 0,$$

siendo x'_B la parte del punto x que se corresponde con esas columnas de B' y x'_D al resto del vector.

Recordemos también que a las variables en $x_{B'}$ las llamamos *'básicas'* y a las que están en $x_{D'}$, *'no básicas'*.

Además, el sistema de ecuaciones equivalente al original $A'x = b'$, donde $A' = B'^{-1}A$ y $b' = B'^{-1}b$, está escrito en forma canónica. Concretamente, $A'_{B'} = I_m$.

2.2.1 Solución factible básica inicial

El algoritmo necesita partir de una solución factible básica inicial. Así que partiremos del sistema de ecuaciones $A'x = b'$ mencionado antes, donde $A' = B'^{-1}A$ y $b' = B'^{-1}b$, que sí está en forma canónica.

Estudiaremos más adelante cómo llegar a ese sistema sin tener que calcular explícitamente la inversa de la matriz B'.

Para esta parte del tema, supondremos sin pérdida de generalidad que $B' = (A_1, \dots, A_m)$ Así, $(A'_1 \dots A'_m)$ es la matriz identidad y $b' = B'^{-1}b \geq 0$. De esta manera, el vértice de partida es $x' = (b'_1, \dots b'_m, 0, \dots 0)$

En forma de cuadro:

Básicas	x_1	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n	b
x_1	1	$\dots$	0	$a'_{1\,m+1}$	$\dots$	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$							$\vdots$
x_m	0	$\dots$	1	$a'_{m\,m+1}$	$\dots$	a'_{mn}	b'_m
z							$z(x')$

Puede ocurrir que alguna columna no básica coincida también con un vector de la matriz identidad. Eso no la convierte automáticamente en básica: la primera columna del cuadro indica qué variable está identificada con un vector de la matriz identidad.

Siguiendo la forma de actuar descrita en el ejemplo, resolvemos el sistema por Cramer despejando las variables básicas. En forma matricial, lo podemos escribir así:

$$x_{B'} = b' - x_{D'}A'_{D'}, \text{ i.e., } x_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij}x_j,\ i = 1, \dots, m.$$

Y ahora sustituimos en $z(x)$

$$z(x) = c^{\mathrm{t}}_{B'}x_{B'} + c^{\mathrm{t}}_{D'}x_{D'} = c^{\mathrm{t}}_{B}b' + (c^{\mathrm{t}}_{D'} - c^{\mathrm{t}}_{B'}A'_{D'})x_{D'}, \text{ i.e.}$$
$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} \Big(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij}\Big)x_j \tag{2.3}$$

Definición 2.2.1 (Costes reducidos y fila indicadora)**.** El coste reducido de la variable $x_j, j = 1, \dots, n$ respecto de la base B es

$$\rho'_j = c_j - c^{\mathrm{t}}_{B'}A'_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij}. \tag{2.4}$$

Se ha extendido la definición anterior para todas las variables aunque en principio 2.4 sugiere hacerlo sólo para las variables no básicas en x'. Esto nos permite obtener un vector ρ^{t} en $\mathbb{R}^{\mathbb{n}}$ que llamaremos *fila indicadora*.

Observación

Obsérvese que la fila indicadora depende de la forma canónica actual. Todos los objetos de esta forma canónica están señalizados con primas ′, de ahí que la fila indicadora ρ' también la lleve.
Por cierto, para una variable básica j en x', $\rho'_j = 0$. Compruébalo.

Teniendo en cuenta que

$$z(x') = c^{\mathrm{t}}_{B'}b' = \sum_{i=1}^{m} c_i\, b'_i$$

la igualdad (2.3) queda

$$\boxed{z(x) = z(x') + \sum_{j=m+1}^{n} \rho'_j\, x_j = z(x') + \rho'^{\mathrm{t}}x} \tag{2.5}$$

Añadimos al cuadro la fila indicadora:

Básicas	x_1	...	x_m	x_{m+1}	...	x_n	b
x_1	1	...	0	$a'_{1\,m+1}$	...	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$							$\vdots$
x_m	0	...	1	$a'_{m\,m+1}$	...	a'_{mn}	b'_m
z	0	...	0	ρ'_{m+1}	...	ρ'_n	$z(x')$

La fila indicadora nos dice qué tenemos que hacer para mejorar la solución actual o decidir que ya hemos alcanzado la solución del problema, como ocurrió en el ejemplo desarrollado antes.

Nuestra convención es que la última fila representa exactamente la igualdad (2.5). En algunos textos la fila indicadora aparece con todos los signos cambiados.

Proposición 2.2.2 (Criterio de optimalidad)**.** *En un problema de minimización, si*

$$\rho'_j \geq 0 \qquad \text{para todo } j \in \mathcal{N},$$

la solución básica factible x' es óptima.

Demostración. Para cualquier $x \in \mathcal{P}$, la identidad (2.5) y la no negatividad de las variables dan

$$z(x) - z(x') = \sum_{j \in \mathcal{N}} \rho'_j \, x_j \geq 0.$$

□

Observación

El criterio es suficiente, pero no necesario para que una solución básica factible concreta sea óptima. En una base degenerada puede haber un coste reducido negativo sin que se pueda mejorar el valor de z porque el paso permitido no nos lleva a un cambio de vértice aunque sí de forma canónica. Una fila indicadora no negativa sí proporciona siempre un certificado directo de optimalidad.

Elección de la variable que entra

Supongamos que existe una variable no básica x_k tal que

$$\rho'_k < 0.$$

Si aumentamos únicamente esa variable, y el resto de variables no básicas las dejamos en 0, usando Cramer determinamos las variables básicas:

$$x_i(\theta) = b'_i - a'_{ik}\theta, \qquad i = 1, \dots, m. \tag{2.6}$$

y

$$z(x(\theta)) = z(x') + \rho'_k \theta. \tag{2.7}$$

Por tanto, mientras conservemos la factibilidad, aumentar x_k hace disminuir el valor de la función objetivo. Decimos que x_k es la *variable que entra en la base*.

Cualquier variable no básica con coste reducido negativo es candidata a ser elegida como variable de entrada. Una elección habitual es la *regla de Dantzig*:

$$\rho'_k = \min\{\rho'_j : j \in \mathcal{N}\}.$$

Esta regla elige la mayor disminución por unidad de aumento de la variable, pero no necesariamente la mayor disminución total en el paso. (Ya vimos en el ejemplo que en eso intervienen otras constantes). Tampoco garantiza que el algoritmo necesite el menor número de iteraciones.

Elección de la variable que sale: regla del mínimo cociente

Para conservar la no negatividad en (2.6) hay que imponer

$$b'_i - a'_{ik}\theta \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Las filas con $a'_{ik} \leq 0$ no limitan el crecimiento de θ. En cambio, si $a'_{ik} > 0$, se necesita

$$\theta \leq \frac{b'_i}{a'_{ik}}.$$

Si la columna k contiene algún elemento positivo, el mayor desplazamiento factible es

$$\theta^* = \min\left\{ \frac{b'_i}{a'_{ik}} : a'_{ik} > 0 \right\}. \tag{2.8}$$

Elegimos un índice ℓ en el que se alcance ese mínimo. Entonces $x_\ell(\theta^*) = 0$, de modo que x_ℓ sale de la base y x_k entra en ella. El número $a'_{\ell k} > 0$ se denomina *elemento pivote*.

Proposición 2.2.3 (Conservación de la factibilidad)**.** *Si la fila pivote se elige mediante la regla del mínimo cociente, el segundo miembro del nuevo cuadro es no negativo.*

Demostración. Para la fila pivote,

$$b''_\ell = \frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}} \geq 0.$$

Si $i \neq \ell$ y $a'_{ik} \leq 0$, entonces

$$b''_i = b'_i - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} b'_\ell \geq b'_i \geq 0.$$

Si $a'_{ik} > 0$, la elección de ℓ da

$$\frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}} \leq \frac{b'_i}{a'_{ik}},$$

que equivale a $b''_i \geq 0$. □

2.2.2 La operación pivote

Denotemos por F'_i la fila i del sistema canónico. Para convertir la columna k en el vector unidad que tiene su 1 en la posición ℓ, efectuamos las operaciones elementales

$$F''_\ell = \frac{1}{a'_{\ell k}} F'_\ell, \qquad F''_i = F'_i - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} F'_\ell \quad (i \neq \ell). \tag{2.9}$$

Así obtenemos otro sistema equivalente y otra forma canónica. Por tanto, la nueva base está formada por las columnas

$$B'' = (A_1, \dots, A_{\ell-1}, A_k, A_{\ell+1}, \dots, A_m).$$

Las fórmulas completas de actualización son

$$a''_{\ell j} = \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}}, \qquad b''_\ell = \frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}}, \tag{2.10}$$

$$a''_{ij} = a'_{ij} - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j}, \qquad b''_i = b'_i - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} b'_\ell, \qquad i \neq \ell, \tag{2.11}$$

$$\rho''_j = \rho'_j - \frac{\rho'_k}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j}, \qquad z(x'') = z(x') + \frac{\rho'_k}{a'_{\ell k}} b'_\ell. \tag{2.12}$$

Aplicando la definición de coste reducido en el nuevo cuadro y utilizando las fórmulas de actualización de sus coeficientes, obtenemos

$$\begin{aligned} \rho''_j &= c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\ell}}^{m} c_i a''_{ij} - c_k a''_{\ell j} \\ &= c_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\ell}}^{m} c_i \left(a'_{ij} - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j} \right) - c_k \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$c_\ell \left(a'_{\ell j} - \frac{a'_{\ell k}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j} \right) = 0.$$

Por tanto, podemos incluir en la suma el término correspondiente a $i = \ell$. Así,

$$\begin{aligned} \rho''_j &= c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \left(a'_{ij} - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j} \right) - c_k \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}} \\ &= \underbrace{\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} \right)}_{\rho'_j} - \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}} \underbrace{\left(c_k - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ik} \right)}_{\rho'_k} \\ &= \rho'_j - \frac{\rho'_k}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j}. \end{aligned}$$

En estas expresiones, todos los elementos del segundo miembro pertenecen al cuadro anterior. En particular,

$$\rho''_k = 0,$$

como debe ocurrir porque x_k pasa a ser básica.

El nuevo valor de la función objetivo satisface

$$z(x'') = z(x') + \rho'_k \theta^*. \tag{2.13}$$

Siendo $\rho'_k < 0$ y $\theta^* \geq 0$, el valor objetivo no aumenta. La mejora es estricta cuando $\theta^* > 0$.

Observación

Para $i \neq \ell$, la fórmula $\quad a''_{ij} = a'_{ij} - \dfrac{a'_{ik} a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}}$

puede recordarse usando una regla nemotécnica conocida como *la regla del rectángulo*: con el elemento que se desea actualizar a'_{ij}, el pivote, y los elementos a'_{ik} y $a'_{\ell j}$ se forma un rectángulo: El nuevo elemento a''_{ij} se obtiene restando del que está en su posición el resultado de multiplicar los elementos que están en la otra diagonal del rectángulo y dividir por el pivote. La misma regla sirve para los términos independientes de las filas de restricciones y para los coeficientes de la fila indicadora. El valor $z(x')$ se actualiza mediante esta misma regla pero hay que sumar en lugar de restar, según se observa en (2.12).

2.2.3 Detección de un problema no acotado

Puede ocurrir que, después de elegir una columna con coste reducido negativo, no haya ningún elemento positivo en ella.

Proposición 2.2.4 (Criterio de no acotación)**.** *Si, para alguna variable no básica x_k,*

$$\rho'_k < 0 \qquad y \qquad a'_{ik} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m),$$

entonces el problema (2.1) es no acotado inferiormente:

$$\inf_{x \in \mathcal{D}} z(x) = -\infty.$$

Demostración. En (2.6), todas las variables básicas permanecen no negativas para cualquier $\theta \geq 0$, pues

$$b'_i - a'_{ik}\theta \geq b'_i \geq 0.$$

Por tanto, $x(\theta)$ es factible para todo $\theta \geq 0$. Sin embargo, (2.7) da

$$z(x(\theta)) = z(x') + \rho'_k \theta \longrightarrow -\infty.$$

□

Observación

Un problema no acotado no es un problema infactible. En el primer caso hay puntos factibles, pero el valor de la función objetivo puede mejorar indefinidamente. En el segundo, el conjunto $\mathcal{P}$ es vacío.

2.2.4 El algoritmo símplex en forma tabular

Suponemos inicialmente conocida una forma canónica cuya solución asociada es factible.

1. Construimos el cuadro y calculamos los costes reducidos ρ'_j.
2. Si $\rho'_j \geq 0$ para toda variable no básica, la solución asociada al cuadro es óptima y el algoritmo termina.
3. Elegimos una variable no básica x_k con $cr'_k < 0$ para que entre en la base.
4. Si $a'_{ik} \leq 0$ para todo i, el problema es no acotado inferiormente y el algoritmo termina.
5. En otro caso, elegimos la fila pivote mediante la regla de la razón mínima:

$$\frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}} = \min\left\{\frac{b'_i}{a'_{ik}} : a'_{ik} > 0\right\}.$$

   La variable x_ℓ sale de la base.
6. Pivotamos sobre $a'_{\ell k}$ y volvemos al paso 1.

2.2.5 Un paso completo en el ejemplo anterior

Recuperemos el cuadro obtenido en el ejemplo introductorio:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	$\frac{5}{2}$	1	0	6
x_5	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	1	4
z	0	-6	$-\frac{19}{2}$	-5	0	10

La solución asociada es

$$\overline{x} = (6, 0, 0, 0, 4), \qquad z(\overline{x}) = 10.$$

Todos los costes reducidos de x_2, x_3, x_4 son negativos. Elegimos x_4 como variable entrante. En su columna solo aparece un elemento positivo, de modo que

$$\theta^* = \frac{6}{1} = 6.$$

La variable x_1 sale de la base y el pivote es el 1 de la primera fila. Tras la operación pivote resulta

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_4	1	2	$\frac{5}{2}$	1	0	6
x_5	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	1	4
z	5	4	3	0	0	-20

La nueva solución asociada es

$$\hat{x} = (0, 0, 0, 6, 4), \qquad z(\hat{x}) = -20.$$

Como todos los costes reducidos son ahora no negativos, $\hat{x}$ es óptima. Obsérvese además que

$$-20 = 10 + (-5)\frac{6}{1},$$

tal como predice (2.13).

2.2.6 Las fórmulas de pivote para una base cualquiera

La hipótesis de que las variables básicas del cuadro actual sean $x_1, \dots, x_m$ se adoptó únicamente para simplificar la notación. Consideremos ahora una forma canónica cuyas variables básicas, ordenadas según las filas del cuadro, sean

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_m}.$$

La base correspondiente está formada por las columnas

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_m}.$$

Supongamos que la variable no básica x_k entra en la base y que la fila pivote es la fila ℓ. Entonces la variable que sale es x_{i_ℓ} y el elemento pivote es $a'_{\ell k}$. La nueva base está formada por las columnas

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_{\ell-1}}, A_k, A_{i_{\ell+1}}, \dots, A_{i_m}.$$

Las operaciones por filas no dependen de los nombres de las variables básicas. Por tanto, las fórmulas de actualización de las restricciones siguen siendo

$$a''_{\ell j} = \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}}, \qquad b''_\ell = \frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}},$$

$$a''_{rj} = a'_{rj} - \frac{a'_{rk}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j}, \qquad b''_r = b'_r - \frac{a'_{rk}}{a'_{\ell k}} b'_\ell, \qquad r \neq \ell.$$

En el cuadro actual, el coste reducido de x_j es

$$\rho'_j = c_j - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} a'_{rj}.$$

Después del cambio de base,

$$\rho''_j = c_j - \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq \ell}}^{m} c_{i_r} a''_{rj} - c_k a''_{\ell j}.$$

Sustituyendo las fórmulas anteriores, obtenemos

$$\rho''_j = c_j - \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq \ell}}^{m} c_{i_r} \left(a'_{rj} - \frac{a'_{rk}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j} \right) - c_k \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}}.$$

Como

$$c_{i_\ell} \left(a'_{\ell j} - \frac{a'_{\ell k}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j} \right) = 0,$$

podemos incorporar a la suma el término correspondiente a $r = \ell$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \rho''_j &= c_j - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} \left(a'_{rj} - \frac{a'_{rk}}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j} \right) - c_k \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}} \\ &= \underbrace{\left(c_j - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} a'_{rj} \right)}_{\rho'_j} - \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}} \underbrace{\left(c_k - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} a'_{rk} \right)}_{\rho'_k}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\boxed{\rho''_j = \rho'_j - \frac{\rho'_k}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j}.} \tag{2.14}$$

También puede obtenerse directamente la actualización del valor de la función objetivo. En el cuadro actual,

$$z(x') = \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} b'_r,$$

mientras que en el nuevo cuadro

$$z(x'') = \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq \ell}}^{m} c_{i_r} b''_r + c_k b''_\ell.$$

Sustituyendo los nuevos términos independientes,

$$\begin{aligned} z(x'') &= \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq \ell}}^{m} c_{i_r}\left(b'_r - \frac{a'_{rk}}{a'_{\ell k}} b'_\ell\right) + c_k \frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}} \\ &= z(x') + \frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}}\left(c_k - \sum_{r=1}^{m} c_{i_r} a'_{rk}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{z(x'') = z(x') + \frac{\rho'_k}{a'_{\ell k}} b'_\ell = z(x') + \rho'_k \theta^*.} \tag{2.15}$$

Por tanto, las fórmulas de la operación pivote son exactamente las mismas que en el caso particular estudiado anteriormente. La única diferencia es que la variable básica asociada a la fila r ya no es necesariamente x_r, sino x_{i_r}.

2.2.7 Degeneración, empates y terminación

Si en la regla de la razón mínima se obtiene $\theta^* = 0$, la nueva solución básica factible coincide con la anterior, aunque la base cambia. Este fenómeno se denomina *degeneración*. También aparece degeneración cuando el mínimo de las razones se alcanza en varias filas: varias variables básicas pueden anularse simultáneamente.

En ausencia de degeneración, cada pivote efectuado con $\rho'_k < 0$ produce una disminución estricta de la función objetivo. Como solo hay un número finito de bases, ninguna puede repetirse y el algoritmo termina tras un número finito de iteraciones.

Con soluciones degeneradas es posible, aunque poco frecuente, regresar a una base ya visitada y entrar en un ciclo. Una regla sencilla que evita este problema es la *regla de Bland*:

1. entre las variables no básicas con coste reducido negativo, entra la de menor índice;
2. si hay empate en la regla del mínimo cociente, sale la variable básica de menor índice.

Con esta regla el método símplex no cicla.

2.2.8 Cómo reconocer soluciones óptimas alternativas

Supongamos que hemos llegado a un cuadro óptimo. Si todos los costes reducidos de las variables no básicas son estrictamente positivos, la solución básica asociada es la única solución óptima. En efecto, la igualdad

$$z(x) - z(x') = \sum_{j=m+1}^{n} \rho'_j \, x_j$$

solo puede anularse si $x_D = 0$.

Si alguna variable no básica tiene coste reducido cero, puede haber soluciones óptimas alternativas. Si esa variable puede aumentar conservando la factibilidad, el movimiento correspondiente mantiene constante la función objetivo. Al efectuar la regla del mínimo cociente, obtendremos otro vértice óptimo; si su columna no tiene elementos positivos, obtendremos una semirrecta de soluciones óptimas (rayo óptimo, dicen algunos).

Observación

La existencia de un coste reducido nulo no garantiza por sí sola que haya otra solución óptima distinta: en una solución degenerada, el único paso permitido para esa variable puede ser $\theta = 0$.

2.3 Cómo obtener una base factible inicial

El algoritmo anterior necesita una forma canónica con segundo miembro no negativo. Cuando no disponemos de ella, introducimos variables artificiales. Estudiaremos primero el método de las dos fases, que separa con claridad la búsqueda de una base factible de la optimización de la función objetivo original.

Antes de comenzar, multiplicamos por -1 las ecuaciones cuyo término independiente sea negativo. Podemos suponer así que

$$b \geq 0.$$

2.3.1 Método de las dos fases

Introducimos un vector de variables artificiales $t = (t_1, \dots, t_m) \geq 0$ y consideramos el problema auxiliar

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & w(x,t) = \sum_{i=1}^{m} t_i, \\ \text{sujeto a} \quad & Ax + It = b, \\ & x \geq 0, \qquad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Este problema dispone inmediatamente de la solución básica factible

$$x = 0, \qquad t = b,$$

pues las columnas de las variables artificiales forman la matriz identidad. Además, $w \geq 0$, de modo que el problema auxiliar no puede ser no acotado inferiormente.

Proposición 2.3.1 (Interpretación de la fase I)**.** *Sea w^* el valor óptimo de (2.16). Entonces:*

1. *$w^* \geq 0$;*
2. *si $w^* > 0$, el problema original es infactible;*

3. *si $w^* = 0$, el problema original es factible y la componente x de cualquier solución óptima de la fase I es factible para el problema original.*

Demostración. El primer apartado se deduce de $t \geq 0$. Si $w^* = 0$, todas las variables artificiales se anulan y las restricciones del problema auxiliar quedan $Ax = b$, $x \geq 0$.

Recíprocamente, si existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$, entonces $(x, 0)$ es factible en la fase I y tiene valor $w(x, 0) = 0$. Por tanto, el óptimo de la fase I es cero. Esta equivalencia prueba también el segundo apartado. □

Final de la fase I

Si $w^* > 0$, detenemos el procedimiento: $\mathcal{P} = \emptyset$.

Supongamos que $w^* = 0$. Todas las variables artificiales valen cero, pero alguna de ellas podría permanecer en la base con valor cero. Antes de empezar la fase II procedemos del siguiente modo:

1. Si una variable artificial básica ocupa la fila i y existe en esa fila un coeficiente no nulo correspondiente a una variable original no básica, pivotamos sobre él. El pivote puede ser positivo o negativo: como el término independiente de esa fila es cero, la factibilidad no se pierde.

2. Si todos esos coeficientes son cero, al eliminar las columnas artificiales la fila queda reducida a $0 = 0$. La ecuación es redundante y se elimina.

Al terminar, retiramos todas las columnas artificiales, recuperamos la función objetivo original y calculamos de nuevo su fila de costes reducidos respecto de la base obtenida. Comienza entonces la *fase II*, que no es otra cosa que el algoritmo descrito en la Sección 2.2.

2.3.2 Método de penalización o de la gran M

Otra posibilidad consiste en conservar las variables artificiales y penalizarlas en la función objetivo:

$$\text{minimizar} \qquad c^{\mathrm{t}}x + M\sum_{i=1}^{m} t_i,$$

donde $M > 0$ representa una cantidad suficientemente grande. Si el problema original es factible, el menor valor posible de $\sum_{i=1}^{m} t_i$ es cero. Por tanto, la penalización obliga primero a anular las variables artificiales y, entre las soluciones para las que estas se anulan, a minimizar la función objetivo original.

Desde el punto de vista teórico, M puede tratarse simbólicamente. Como M no aparece en las restricciones, solo aparecerá en la fila indicadora. Los elementos de esta fila serán expresiones de la forma

$$e + fM, \qquad e, f \in \mathbb{R}.$$

Para trabajar con estas expresiones solo necesitamos conocer su signo cuando M es suficientemente grande. En particular,

$$e + fM \geq 0 \quad \text{para } M \text{ suficientemente grande} \quad \Longleftrightarrow \quad (f > 0) \quad \text{o bien} \quad (f = 0 \text{ y } e \geq 0).$$

Análogamente,

$$e + fM < 0 \quad \text{para } M \text{ suficientemente grande} \quad \Longleftrightarrow \quad (f < 0) \quad \text{o bien} \quad (f = 0 \text{ y } e < 0).$$

En el código que utilizamos en Sage, cuyos datos son constantes racionales, cada coste reducido se representa en la forma

$$\rho'_j(M) = e_j + f_j M.$$

En lugar de almacenar una única fila indicadora, mantenemos dos: la fila de los coeficientes f_j, correspondiente a la parte que depende de M, y la fila de los términos e_j, que no depende de M. La primera coincide con la fila indicadora asociada a la función objetivo de la fase I,

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{m} t_i,$$

mientras que la segunda corresponde a la función objetivo original $z(x) = c^{\mathrm{t}}x$, utilizada en la fase II.

Las comparaciones se realizan lexicográficamente: se comparan primero los coeficientes de M y, solo cuando estos coinciden, se comparan los términos independientes. En particular, para un problema de minimización, una variable x_j puede entrar en la base si

$$f_j < 0, \qquad \text{o si} \qquad f_j = 0 \quad \text{y} \quad e_j < 0.$$

Si en ambos procedimientos se utilizan las mismas reglas para elegir las variables entrante y saliente, las formas canónicas recorridas por el método de la gran M y por el método de las dos fases son las mismas. Los recorridos pueden diferir cuando aparecen empates y estos se resuelven de distinta forma.

En cálculos realizados en coma flotante no conviene sustituir M por un número muy grande elegido arbitrariamente, pues esto puede provocar errores de redondeo y problemas de escala. Por esta razón, en una implementación numérica suele ser preferible utilizar el método de las dos fases.

2.4 Resumen del algoritmo símplex

Consideremos un problema de programación lineal de minimización

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z(x) = c^{\mathrm{t}}x, \\ \text{sujeto a} & x \in \mathcal{D}. \end{array}$$

En primer lugar, lo escribimos en forma estándar usando variables de holgura y/o sustitución de variables reales por la diferencia de variables no negativas:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z(x) = c^{\mathrm{t}}x, \\ \text{sujeto a} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Si no disponemos directamente de una base factible, aplicamos la *fase I*. Si el valor óptimo del problema auxiliar es positivo, el problema original no tiene soluciones factibles. Si es cero, obtenemos una base factible del problema original, eliminando, si es necesario, las ecuaciones redundantes.

La forma canónica y su fila indicadora

Partimos de una forma canónica factible

$$A'x = b', \qquad x \geq 0, \qquad b' \geq 0.$$

Para simplificar la notación, suponemos, reordenando las variables si es necesario, que las variables básicas del cuadro actual son $x_1, \dots, x_m$.

La solución básica factible asociada es

$$x' = (b'_1, \dots, b'_m, 0, \dots, 0)^{\mathrm{t}}.$$

Calculamos los costes reducidos:

$$\rho'_j = c_j - (c_1, \dots, c_m)A'_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

En particular,

$$\rho'_1 = \cdots = \rho'_m = 0.$$

El cuadro correspondiente tiene la forma

	x_1	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	b'
x_1	1	$\cdots$	0	$a'_{1,m+1}$	$\cdots$	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\cdots$	1	$a'_{m,m+1}$	$\cdots$	a'_{mn}	b'_m
	0	$\cdots$	0	ρ'_{m+1}	$\cdots$	ρ'_n	

La fila indicadora permite reconocer la optimalidad y orientar los cambios de base, pues para cualquier solución factible x se verifica

$$\boxed{z(x) = z(x') + \sum_{j=m+1}^{n} \rho'_j x_j.}$$

Criterio de optimalidad

Si

$$\rho'_j \geq 0 \qquad \text{para todo } j = m+1, \dots, n,$$

entonces, para cualquier solución factible x,

$$z(x) - z(x') = \sum_{j=m+1}^{n} \rho'_j x_j \geq 0.$$

Por tanto, x' es una solución óptima.

Elección de las variables de entrada y salida

Si existe algún coste reducido negativo, elegimos una variable no básica x_k tal que

$$\rho'_k < 0$$

como variable de entrada.

Al aumentar x_k desde cero, manteniendo nulas las restantes variables no básicas, los valores de las variables básicas son

$$x_i = b'_i - a'_{ik} x_k, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Distinguimos dos casos:

1. *La columna de entrada contiene algún elemento positivo.*

   Para conservar la factibilidad, debemos imponer

   $$x_k \leq \frac{b'_i}{a'_{ik}} \qquad \text{si } a'_{ik} > 0.$$

   Por tanto, el mayor aumento permitido es

   $$\theta = \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ a'_{ik} > 0}} \frac{b'_i}{a'_{ik}}.$$

   Elegimos una fila ℓ en la que se alcance este mínimo:

   $$\frac{b'_\ell}{a'_{\ell k}} = \theta.$$

   La variable x_ℓ sale de la base y x_k ocupa su lugar.

   Efectuamos la operación pivote sobre $a'_{\ell k}$ para obtener el nuevo cuadro

   $$A''x = b'', \qquad \text{con fila indicadora } \rho''.$$

   La nueva solución básica factible x'' satisface

   $$z(x'') = z(x') + \rho'_k \theta \leq z(x').$$

Si $\theta > 0$, el valor de la función objetivo disminuye estrictamente. Si $\theta = 0$, el paso es degenerado: cambia la base, pero la solución básica factible sigue siendo el mismo punto.

Volvemos a examinar la fila indicadora del nuevo cuadro y repetimos el procedimiento.

2. *La columna de entrada no contiene elementos positivos.*

   En este caso,

   $$a'_{ik} \leq 0 \qquad \text{para todo } i = 1, \dots, m.$$

   Podemos aumentar x_k indefinidamente, pues

   $$b'_i - a'_{ik} x_k \geq 0 \qquad \text{para todo } x_k \geq 0.$$

   Además,

   $$z(x) = z(x') + \rho'_k x_k \longrightarrow -\infty \qquad \text{cuando } x_k \longrightarrow +\infty.$$

   Por tanto, el problema es no acotado inferiormente.

Un coste reducido negativo no garantiza que el siguiente paso produzca una mejora estricta, pues el paso puede ser degenerado. Para asegurar que el algoritmo no forme ciclos, podemos aplicar las reglas de Bland en la elección de las variables de entrada y salida.

Las soluciones óptimas a partir de un cuadro óptimo

Supongamos que el cuadro actual es óptimo, es decir,

$$\rho'_j \geq 0 \qquad \text{para todo } j = m+1, \dots, n.$$

Definimos

$$J = \{j \in \{m+1, \dots, n\} : \rho'_j = 0\}.$$

Para cualquier solución factible x,

$$z(x) - z(x') = \sum_{\substack{m+1 \leq j \leq n \\ j \notin J}} \rho'_j x_j.$$

Todos los coeficientes de esta suma son estrictamente positivos. En consecuencia,

$$\boxed{x \text{ es óptima} \quad \Longleftrightarrow \quad x_j = 0 \quad \text{para todo } j \in \{m+1, \dots, n\} \setminus J,}$$

siempre que x sea factible.

Por tanto, todas las soluciones óptimas se obtienen resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A'x = b', \\ x \geq 0, \\ x_j = 0, \quad j \in \{m+1, \dots, n\} \setminus J. \end{cases}$$

Si $J = \emptyset$, la solución óptima es única y coincide con x'. Si $J \neq \emptyset$, debemos estudiar el sistema anterior para determinar si existen soluciones óptimas distintas de x'. La existencia de un coste reducido nulo en una variable no básica, por sí sola, no garantiza que las haya.

Por tanto, en cada iteración el método responde a tres preguntas:

¿Podemos mejorar?
¿En qué dirección?
¿Hasta dónde podemos avanzar sin perder la factibilidad?

2.5 Matrices pivotantes

En cada iteración del método símplex efectuamos operaciones elementales por filas para pasar de una forma canónica a otra. Todas esas operaciones pueden recogerse en una única multiplicación matricial. La matriz que realiza esa transformación se denomina *matriz pivotante*.

2.5.1 Un ejemplo

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && z(x) = 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 9x_4, \\ \text{sujeto a} \quad & && 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 2700, \\ & && 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 1080, \\ & && x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 216, \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Introduciendo las variables de holgura s_1, s_2, s_3, obtenemos la forma canónica inicial. En la última fila escribimos los costes reducidos; como se trata de un problema de maximización, un coste reducido positivo indica una posible mejora.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
s_1	3	2	3	−2	1	0	0	2700
s_2	4	−5	6	5	0	1	0	1080
s_3	$\boxed{1}$	1	−1	1	0	0	1	216
$\rho^{(0)}$	10	8	7	9	0	0	0	0

(T_0)

Hacemos entrar a x_1 y salir a s_3. Las operaciones necesarias son

$$F_1 \longleftarrow F_1 - 3F_3, \qquad F_2 \longleftarrow F_2 - 4F_3,$$

y quedan recogidas en la matriz

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^{(1)} = P_1 A^{(0)}, \qquad b^{(1)} = P_1 b^{(0)}.$$

Después de actualizar también la fila de costes reducidos, resulta

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	-1	6	-5	1	0	-3	2052
s_2	0	-9	$\boxed{10}$	1	0	1	-4	216
x_1	1	1	-1	1	0	0	1	216
$\rho^{(1)}$	0	-2	17	-1	0	0	-10	2160

(T_1)

En el segundo cambio entra x_3 y sale s_2. La matriz pivotante es

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$A^{(2)} = P_2 A^{(1)} = P_2 P_1 A^{(0)}, \qquad b^{(2)} = P_2 b^{(1)} = P_2 P_1 b^{(0)}.$$

El nuevo cuadro es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
s_1	0	$\boxed{\frac{22}{5}}$	0	$-\frac{28}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9612}{5}$
x_3	0	$-\frac{9}{10}$	1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{108}{5}$
x_1	1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{11}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1188}{5}$
$\rho^{(2)}$	0	$\frac{133}{10}$	0	$-\frac{27}{10}$	0	$-\frac{17}{10}$	$-\frac{16}{5}$	$\frac{12636}{5}$

(T_2)

Hacemos ahora entrar a x_2 y salir a s_1. En este caso,

$$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & 0 & 0 \\ \frac{9}{44} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{44} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$A^{(3)} = P_3 P_2 P_1 A^{(0)}, \qquad b^{(3)} = P_3 P_2 P_1 b^{(0)},$$

y obtenemos

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
x_2	0	1	0	$-\frac{14}{11}$	$\frac{5}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$\frac{4806}{11}$
x_3	0	0	1	$-\frac{23}{22}$	$\frac{9}{44}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{23}{44}$	$\frac{4563}{11}$
x_1	1	0	0	$\boxed{\frac{27}{22}}$	$-\frac{1}{44}$	$\frac{5}{44}$	$\frac{27}{44}$	$\frac{2133}{11}$
$\rho^{(3)}$	0	0	0	$\frac{313}{22}$	$-\frac{133}{44}$	$\frac{5}{44}$	$-\frac{61}{44}$	$\frac{91719}{11}$

(T_3)

Finalmente, entra x_4 y sale x_1. La cuarta matriz pivotante es

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{28}{27} \\ 0 & 1 & \frac{23}{27} \\ 0 & 0 & \frac{22}{27} \end{pmatrix}.$$

La forma canónica resultante es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b
x_2	$\frac{28}{27}$	1	0	0	$\frac{11}{54}$	$-\frac{1}{54}$	$\frac{1}{2}$	638
x_3	$\frac{23}{27}$	0	1	0	$\frac{5}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	580
x_4	$\frac{22}{27}$	0	0	1	$-\frac{1}{54}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{1}{2}$	158
$\rho^{(4)}$	$-\frac{313}{27}$	0	0	0	$-\frac{149}{54}$	$-\frac{65}{54}$	$-\frac{17}{2}$	10586

(T_4)

Todos los costes reducidos de las variables no básicas son no positivos. Por tanto, esta forma canónica es óptima para el problema de maximización y

$$x^* = (0, 638, 580, 158), \qquad z(x^*) = 10586.$$

La base final está formada por las columnas A_2, A_3, A_4 de la matriz de restricciones original:

$$B = (A_2\ A_3\ A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -5 & 6 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el último cuadro, las columnas correspondientes a s_1, s_2, s_3 forman la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{54} & -\frac{1}{54} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{27} & \frac{2}{27} & 0 \\ -\frac{1}{54} & \frac{5}{54} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es precisamente B^{-1}. En efecto, las columnas de las variables de holgura formaban I_3 en el sistema original, mientras que el sistema final se obtiene multiplicando por B^{-1}. En consecuencia,

$$\boxed{P_4 P_3 P_2 P_1 = B^{-1}.}$$

El ejemplo muestra que las operaciones de pivote no son operaciones aisladas: su producto proporciona directamente la inversa de la base alcanzada.

2.5.2 Definición y propiedades

Consideremos una forma canónica

$$A'x = b'$$

y supongamos que queremos pivotar sobre el elemento $a'_{\ell k} \neq 0$. Las operaciones por filas son

$$F''_\ell = \frac{1}{a'_{\ell k}} F'_\ell, \qquad F''_i = F'_i - \frac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}} F'_\ell \quad (i \neq \ell).$$

Definición 2.5.1 (Matriz pivotante)**.** La *matriz pivotante* asociada al elemento $a'_{\ell k} \neq 0$ es la matriz $P_{\ell k} = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definida por

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \neq \ell, \\ \dfrac{1}{a'_{\ell k}}, & i = j = \ell, \\ -\dfrac{a'_{ik}}{a'_{\ell k}}, & i \neq \ell,\ j = \ell, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Multiplicar por $P_{\ell k}$ a la izquierda equivale exactamente a realizar las operaciones anteriores. Por tanto,

$$A'' = P_{\ell k} A', \qquad b'' = P_{\ell k} b'.$$

Proposición 2.5.2. *La matriz $P_{\ell k}$ es invertible. Su inversa se obtiene sustituyendo la columna ℓ de la identidad por la columna A'_k:*

$$P_{\ell k}^{-1} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_{\ell-1} & A'_k & e_{\ell+1} & \cdots & e_m \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\det(P_{\ell k}) = \frac{1}{a'_{\ell k}}.$$

Demostración. La columna k se transforma en e_ℓ, es decir, $P_{\ell k} A'_k = e_\ell$. Las restantes columnas de la identidad permanecen fijas al invertir las operaciones por filas. Esto proporciona la expresión de $P_{\ell k}^{-1}$. La fórmula del determinante se deduce también de las operaciones elementales: sumar un múltiplo de una fila a otra no modifica el determinante y dividir la fila pivote por $a'_{\ell k}$ lo multiplica por $1/a'_{\ell k}$. □

Proposición 2.5.3 (Producto de matrices pivotantes)**.** *Supongamos que, partiendo de $Ax = b$, una sucesión de pivotes conduce a una forma canónica respecto de la base B', digamos $A'x = b'$. Si $P_1, \dots, P_q$ son las matrices pivotantes utilizadas, entonces*

$$P_q \cdots P_1 = B'^{-1}.$$

En particular,

$$A' = B'^{-1}A, \qquad b' = B'^{-1}b.$$

Demostración. Sea $M = P_q \cdots P_1$. La forma final es $A' = MA$. Las columnas de A' correspondientes a la base B' forman la identidad, de modo que

$$MB' = I_m.$$

Por tanto, $M = B'^{-1}$. □

Idea que debemos retener

Una forma canónica no es más que el sistema original multiplicado por la inversa de una base. Cada paso del símplex actualiza esa inversa mediante una matriz pivotante.

2.5.3 Cálculo de los costes reducidos a partir de los datos originales

Sea B' la base que determina la forma canónica

$$A' = B'^{-1}A, \qquad b' = B'^{-1}b,$$

y sea $c_{B'}$ el vector de costes de las variables básicas, ordenados como las columnas de B'. Si $A'_j = B'^{-1}A_j$, el coste reducido de x_j es

$$\boxed{\rho'_j = c_j - c_{B'}^{\mathrm{t}} A'_j = c_j - c_{B'}^{\mathrm{t}} B'^{-1} A_j.} \tag{2.18}$$

Por tanto, toda la fila de costes reducidos puede calcularse mediante

$$\boxed{(\rho')^{\mathrm{t}} = c^{\mathrm{t}} - c_B^{\mathrm{t}} B^{-1} A.} \tag{2.19}$$

Para las variables básicas se obtiene $\rho'_j = 0$. Además, para cualquier solución factible x,

$$z(x) = z(x') + (\rho')^{\mathrm{t}} x, \tag{2.20}$$

donde x' es la solución básica factible asociada a B'. Como las componentes básicas de ρ' son nulas, la suma solo contiene realmente las variables no básicas.

2.5.4 Incorporación de la función objetivo al sistema. OPCIONAL

Partimos de nuevo del problema 2.1

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z(x) = c^{\mathrm{t}}x, \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

Incorporamos al sistema de restricciones la ecuación $-c^{\mathrm{t}}x + z = 0$ y consideramos a z como otra variable más del problema, en este caso, no restringida en signo.

Definiendo la función objetivo como el propio valor de esta nueva variable, construimos un problema de programación lineal equivalente al dado:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \Phi(x,z) = z, \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & -(c)^{\mathrm{t}}x + z = 0, \\ & x \geq 0, \qquad z \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Este sistema ampliado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix},$$

Sea B' una base formada por columnas de la matriz original A, y sea $c_{B'}$ el vector de costes de sus variables básicas, colocados en el mismo orden que las columnas de B'. La base correspondiente del sistema ampliado es

$$\hat{B}' = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ -c_{B'}^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es

$$(\hat{B}')^{-1} = \begin{pmatrix} (B')^{-1} & 0 \\ c_{B'}^{\mathrm{t}}(B')^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar el sistema ampliado original por esta matriz, obtenemos

$$\begin{aligned} (\hat{B}')^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (B')^{-1}A & 0 \\ c_{B'}^{\mathrm{t}}(B')^{-1}A - c^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Del mismo modo, el segundo miembro se transforma en

$$(\hat{B}')^{-1} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B')^{-1}b \\ c_{B'}^{\mathrm{t}}(B')^{-1}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ z(x') \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la forma canónica ampliada asociada a B' es

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b' \\ z(x') \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Su última ecuación es

$$-(\rho')^{\mathrm{t}} x + z = z(x').$$

que es la ecuación (2.20).

Relación entre las dos filas indicadoras. Buscamos una relación entre las filas indicadoras de las dos formas canónicas:

Consideremos ahora otra base B'', formada también por columnas de la matriz original A. La correspondiente base del sistema ampliado es

$$\hat{B}'' = \begin{pmatrix} B'' & 0 \\ -c_{B''}^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma canónica ampliada asociada a B'' es

$$\begin{pmatrix} A'' & 0 \\ -(\rho'')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'' \\ z(x'') \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

donde

$$A'' = (B'')^{-1}A, \qquad b'' = (B'')^{-1}b.$$

Como

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} = (\hat{B}')^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} A'' & 0 \\ -(\rho'')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} = (\hat{B}'')^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -c^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz que transforma la forma canónica ampliada asociada a B' en la asociada a B'' es

$$\boxed{\widehat{T}_{B' \to B''} = (\hat{B}'')^{-1}\hat{B}'.} \tag{2.24}$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} A'' & 0 \\ -(\rho'')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} = \widehat{T}_{B' \to B''} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix},$$

y también

$$\begin{pmatrix} b'' \\ z(x'') \end{pmatrix} = \widehat{T}_{B'\to B''} \begin{pmatrix} b' \\ z(x') \end{pmatrix}.$$

Podemos escribir explícitamente esta matriz $\widehat{T}_{B'\to B''}$ pues

$$(\hat{B}'')^{-1} = \begin{pmatrix} (B'')^{-1} & 0 \\ c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

y, por tanto, resulta

$$\boxed{\widehat{T}_{B'\to B''} = \begin{pmatrix} (B'')^{-1}B' & 0 \\ c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B' - c_{B'}^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}.} \tag{2.25}$$

Multipliquemos esta matriz por la forma canónica ampliada asociada a la base B' :

$$\begin{pmatrix} (B'')^{-1}B' & 0 \\ c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B' - c_{B'}^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B'')^{-1}B'A' & 0 \\ c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B'A' - c_{B'}^{\mathrm{t}}A' - (\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera fila de bloques proporciona

$$(B'')^{-1}B'A' = (B'')^{-1}A = A''.$$

Para la última fila de bloques obtenemos

$$\begin{aligned} \left(c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B' - c_{B'}^{\mathrm{t}}\right)A' - (\rho')^{\mathrm{t}} &= c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B'A' - c_{B'}^{\mathrm{t}}A' - (\rho')^{\mathrm{t}} \\ &= c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}A - c_{B'}^{\mathrm{t}}A' - (\rho')^{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

Por la definición de la fila indicadora correspondiente a la base B',

$$(\rho')^{\mathrm{t}} = c^{\mathrm{t}} - c_{B'}^{\mathrm{t}}A'.$$

En consecuencia,

$$c_{B'}^{\mathrm{t}}A' + (\rho')^{\mathrm{t}} = c^{\mathrm{t}}.$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}A - c^{\mathrm{t}} &= -\left(c^{\mathrm{t}} - c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}A\right) \\ &= -(\rho'')^{\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el producto proporciona efectivamente

$$\boxed{\begin{pmatrix} A'' & 0 \\ -(\rho'')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} = \widehat{T}_{B'\to B''} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix}.}$$

Así pues, de la última fila obtenemos lo que buscábamos

$$(\rho')^{\mathrm{t}} - (c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B' - c_{B'}^{\mathrm{t}})A' = (\rho'')^{\mathrm{t}}$$

Esta relación se puede escribir de una manera más útil.

Supongamos que $B'' = \begin{pmatrix} A_{i_1} & \cdots & A_{i_m} \end{pmatrix}$ y denotemos por $(\rho')_{B''}^{\mathrm{t}} = (\rho'_{i_1} \dots \rho'_{i_m})$ el vector formado por los costes reducidos en la forma canónica $A'x = b'$ de las variables que constituirán la otra base B''.

Por la definición de los costes reducidos,

$$(\rho'_{B''})^{\mathrm{t}} = c_{B''}^{\mathrm{t}} - c_{B'}^{\mathrm{t}}(B')^{-1}B''.$$

Multiplicando esta igualdad por $(B'')^{-1}B'$, obtenemos

$$(\rho'_{B''})^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B' = c_{B''}^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B' - c_{B'}^{\mathrm{t}}.$$

Sustituyendo en la relación entre las filas indicadoras,

$$\begin{aligned}(\rho'')^{\mathrm{t}} &= (\rho')^{\mathrm{t}} - (\rho'_{B''})^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}B'A' \\ &= (\rho')^{\mathrm{t}} - (\rho'_{B''})^{\mathrm{t}}(B'')^{-1}A \\ &= (\rho')^{\mathrm{t}} - (\rho'_{B''})^{\mathrm{t}}A''.\end{aligned}$$

En consecuencia, la relación más sencilla entre las dos filas indicadoras es

$$\boxed{(\rho'')^{\mathrm{t}} = (\rho')^{\mathrm{t}} - (\rho'_{B''})^{\mathrm{t}}A''.}$$

Componente a componente, esta igualdad se escribe como

$$\boxed{\rho''_j = \rho'_j - \sum_{r=1}^{m} \rho'_{i_r} a''_{rj}.}$$

Caso de un único pivote. Supongamos ahora que B'' se obtiene a partir de B' mediante un único pivote: la variable x_k entra en la base y sustituye a la variable básica situada en la fila ℓ.

Todas las variables de B'', salvo la variable entrante x_k, ya eran básicas en B'. Por tanto, sus costes reducidos en la forma canónica actual son cero. En consecuencia,

$$\rho'_{B''} = \rho'_k e_\ell.$$

La fórmula general queda entonces

$$\begin{aligned}(\rho'')^{\mathrm{t}} &= (\rho')^{\mathrm{t}} - \rho'_k e_\ell^{\mathrm{t}} A'' \\ &= (\rho')^{\mathrm{t}} - \rho'_k \begin{pmatrix} a''_{\ell 1} & \cdots & a''_{\ell n} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $j = 1, \dots, n$,

$$\rho''_j = \rho'_j - \rho'_k a''_{\ell j}.$$

Como la fila pivote se obtiene mediante

$$a''_{\ell j} = \frac{a'_{\ell j}}{a'_{\ell k}},$$

recuperamos la fórmula habitual:

$$\boxed{\rho''_j = \rho'_j - \frac{\rho'_k}{a'_{\ell k}} a'_{\ell j}.}$$

Así, el producto matricial ampliado proporciona directamente la relación entre todos los elementos de las dos filas indicadoras, y la fórmula habitual de actualización correspondiente a un único pivote aparece como caso particular.

Esta escritura será especialmente útil al estudiar los ciclos y la regla de Bland.

2.6 Degeneración, ciclaje y reglas anticiclaje

Definición 2.6.1. Una solución básica factible es *degenerada* si alguna de sus variables básicas es cero. Un paso del símplex es *degenerado* si cambia la base, pero no cambia la solución básica factible; equivalentemente, si el desplazamiento permitido por la regla del mínimo cociente es $\theta^* = 0$.

En un paso degenerado no mejora el valor de la función objetivo, aunque se efectúe un cambio de forma canónica. La degeneración no implica por sí sola que el algoritmo vaya a fallar. El inconveniente aparece cuando una sucesión de pasos degenerados devuelve el algoritmo a una base ya visitada.

Definición 2.6.2. Decimos que el método símplex entra en un *ciclo* cuando vuelve a una base anterior y, por tanto, repite indefinidamente la misma sucesión de bases.

2.6.1 Un ejemplo de ciclaje

Consideremos el problema clásico

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4, \\ \text{sujeto a} \quad & \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 \le 0, \\ & \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \le 0, \\ & x_1 \le 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Introduciendo las holguras x_5, x_6, x_7, la base inicial es $\{x_5, x_6, x_7\}$. Las dos primeras variables básicas valen cero, de modo que la solución básica factible inicial es degenerada.

Con la regla de Dantzig y una determinada elección en los empates del mínimo cociente, la sucesión de pivotes

$$(1,1), \quad (2,2), \quad (1,3), \quad (2,4), \quad (1,5), \quad (2,6)$$

devuelve el algoritmo a la forma canónica inicial. En cada par, la primera componente indica la fila pivote y la segunda la columna de la variable entrante. Todos los pasos son degenerados: el término independiente de cada fila pivote es cero y, por tanto, el punto factible y el valor objetivo no cambian.

La sucesión de bases es

$$\begin{aligned} \{x_5, x_6, x_7\} &\longrightarrow \{x_1, x_6, x_7\} \longrightarrow \{x_1, x_2, x_7\} \\ &\longrightarrow \{x_3, x_2, x_7\} \longrightarrow \{x_3, x_4, x_7\} \\ &\longrightarrow \{x_5, x_4, x_7\} \longrightarrow \{x_5, x_6, x_7\}. \end{aligned}$$

Observación

En un ciclo todos los pasos son degenerados. Si un paso produjera una mejora estricta de la función objetivo, no sería posible regresar a una base anterior con el mismo valor objetivo.

2.6.2 Perturbación lexicográfica del segundo miembro

Una primera forma de evitar la degeneración consiste en sustituir

$$b \quad \text{por} \quad b(\varepsilon) = b + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^m \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon > 0.$$

La perturbación se interpreta simbólicamente, considerando que ε es positivo y suficientemente pequeño.

Proposición 2.6.3. *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, salvo a lo sumo un número finito de valores, ninguna solución básica factible del problema perturbado es degenerada.*

Demostración. Sea B una base. Sus variables básicas toman los valores

$$B^{-1}b(\varepsilon) = B^{-1}b + B^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^m \end{pmatrix}.$$

Cada coordenada es un polinomio no idénticamente nulo en ε: una fila no nula de B^{-1} no puede anular simultáneamente todos los monomios $\varepsilon, \ldots, \varepsilon^m$. Por tanto, cada coordenada

solo puede anularse para un número finito de valores de ε. Como existe un número finito de bases, podemos elegir un mismo ε para el que ninguna coordenada básica sea cero. En una base factible todas ellas son no negativas y, por tanto, serán estrictamente positivas. □

Una vez resuelto simbólicamente el problema perturbado, se hace $\varepsilon = 0$ para recuperar una solución del problema original. En la práctica no conviene sustituir ε por un número decimal arbitrario; la comparación lexicográfica evita problemas numéricos y reproduce exactamente el efecto de la perturbación.

2.6.3 Regla de Bland

Fijamos de antemano el orden

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Para un problema de minimización, la regla de Bland establece:

1. Entre las variables no básicas con coste reducido negativo, entra la de menor índice.
2. Se aplica la regla del mínimo cociente. Si el mínimo se alcanza en varias filas, sale la variable básica de menor índice entre las correspondientes a esas filas.

La segunda regla no significa necesariamente elegir la primera fila del cuadro: lo que se compara es el índice de las variables básicas empatadas.

Teorema 2.6.4 (Bland)**.** [*OPCIONAL*] *Si las variables de entrada y salida se eligen mediante la regla de Bland, el método símplex no puede entrar en un ciclo.*

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que se produce un ciclo. Todos sus pasos son degenerados y todas las formas canónicas del ciclo representan el mismo vértice. En particular, cada variable que sale de la base debe volver a entrar en ella en algún otro paso.

Sea t el mayor índice de una variable que entra o sale durante el ciclo. Consideremos una forma canónica T' en la que x_t es la variable entrante. Denotemos por ρ' su vector de costes reducidos. Por la primera regla de Bland,

$$\rho'_t < 0, \qquad \rho'_j \geq 0 \quad \text{para todo } j < t. \tag{2.27}$$

Consideremos ahora una forma canónica T'' del ciclo en la que x_t sale de la base. Sea x_s la variable que entra en ese paso. Como x_s también cambia de estado durante el ciclo y t es el mayor índice que lo hace,

$$s < t.$$

Sean

$$\mathcal{B}'' = \{i_1, \ldots, i_m\}$$

los índices de las variables básicas en T''. Supongamos que $i_r = t$, de modo que la fila r es la fila de la variable x_t. Escribimos $A'' = (a''_{kj})$ y denotamos por ρ'' el vector de costes reducidos de este cuadro. Puesto que x_s entra,

$$\rho''_s < 0.$$

Definimos $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ mediante

$$y_j = \begin{cases} a''_{ks}, & j = i_k, \quad k = 1, \dots, m, \\ -1, & j = s, \\ -\rho''_s, & j = n+1, \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases} \tag{2.28}$$

Las columnas básicas de A'' forman la identidad. Por ello,

$$\sum_{k=1}^{m} a''_{ks} A''_{i_k} - A''_s = 0.$$

Además, los costes reducidos de las variables básicas son cero. Se deduce que

$$\begin{pmatrix} A'' & 0 \\ -(\rho'')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} y = 0. \tag{2.29}$$

Según lo demostrado en la Sección 2.5, las matrices ampliadas correspondientes a dos formas canónicas equivalentes se obtienen una de otra multiplicando por una matriz invertible. En consecuencia, tienen el mismo núcleo, y (2.29) implica

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ -(\rho')^{\mathrm{t}} & 1 \end{pmatrix} y = 0.$$

La última fila de esta igualdad da

$$-\sum_{k=1}^{m} \rho'_{i_k} a''_{ks} + \rho'_s - \rho''_s = 0,$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{k=1}^{m} \rho'_{i_k} a''_{ks} = \rho'_s - \rho''_s > 0. \tag{2.30}$$

La desigualdad se debe a que $s < t$, de modo que $\rho'_s \geq 0$ por (2.27), mientras que $\rho''_s < 0$. Por (2.30), existe $q \in \{1, \dots, m\}$ tal que

$$\rho'_{i_q} a''_{qs} > 0.$$

En particular, $\rho'_{i_q} \neq 0$, por lo que x_{i_q} no es básica en T'. Sin embargo, sí es básica en T''. Por tanto, x_{i_q} entra y sale durante el ciclo, y la elección de t implica en principio que

$i_q \le t$. No puede darse la igualdad: si $i_q = t$, entonces $q = r$ y $\rho'_{i_q} a''_{qs} = \rho'_t a''_{rs} < 0$, pues $\rho'_t < 0$ y $a''_{rs} > 0$. Esto contradice la elección de q. Por tanto,

$$i_q < t.$$

Aplicando de nuevo (2.27), obtenemos $\rho'_{i_q} \ge 0$. Como no es cero,

$$\rho'_{i_q} > 0, \qquad a''_{qs} > 0.$$

Todas las formas canónicas del ciclo representan el mismo vértice. Como x_{i_q} es no básica en T' y básica en T'', su valor en T'' es cero; por tanto, el término independiente de la fila q es $b''_q = 0$.

La variable x_t sale de la base de T'', de modo que también $b''_r = 0$ y $a''_{rs} > 0$. En la regla del mínimo cociente, las filas q y r proporcionan ambas el cociente cero. Pero $i_q < t = i_r$, por lo que la segunda regla de Bland obliga a que salga x_{i_q} antes que x_t. Esto contradice la elección del paso en el que salía x_t.

Por tanto, la regla de Bland impide la formación de ciclos. □

Corolario 2.6.5. *Con la regla de Bland, el método símplex termina después de un número finito de iteraciones: encuentra una solución óptima o detecta que el problema es no acotado.*

Demostración. Existe un número finito de bases. Si el algoritmo no terminara, alguna base tendría que repetirse y se formaría un ciclo, lo que contradice el teorema. □

2.7 Ejercicios

Ejercicio 2.2.

1. Partiendo de $x_B = b' - A'_D x_D$, deduzca la fórmula de los costes reducidos y compruebe que el coste reducido de toda variable básica es cero.
2. Demuestre directamente que las operaciones (2.9) convierten la columna de x_k en el vector unidad e_ℓ y conservan el sistema de ecuaciones.
3. En el ejemplo de este capítulo, aplique la regla de Dantzig en lugar de hacer entrar a x_4. Compare las bases visitadas y los valores de la función objetivo.
4. Construya un ejemplo de una solución básica factible degenerada y muestre que dos bases distintas pueden representar el mismo vértice.
5. Suponga que un cuadro óptimo contiene una variable no básica con coste reducido cero. Distinga, mediante ejemplos, los casos en los que existe otro vértice óptimo, una semirrecta de soluciones óptimas o solución óptima única.
6. Aplique la fase I al sistema

   $$x_1 - x_2 = 1, \qquad x_1 + x_2 = 3, \qquad x_1, x_2 \ge 0,$$

   y obtenga una base factible para el problema de minimizar $z(x) = 2x_1 - 5x_2$.

Ejercicio 2.3 (Reconstrucción y continuación de una tabla)**.** Dada la siguiente tabla, correspondiente a cierta iteración del método símplex,

	c_j	14	25	18	0	0	0	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b'
		$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	200
		$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	100
		0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	40
	ρ_j							

se pide:

a) Escribir las ecuaciones transformadas correspondientes a la tabla.

b) Determinar cuáles son las variables básicas.

c) Completar la tabla.

d) Justificar si la solución básica factible obtenida es óptima. En caso negativo, determinar qué variable debe entrar en la base y cuál debe salir para obtener una solución factible básica mejor.

e) Continuar las iteraciones hasta obtener la tabla final.

Ejercicio 2.4 (Interpretación de tablas del símplex)**.** Las tablas siguientes corresponden a determinadas iteraciones del método símplex aplicado a problemas de minimización. Cuando aparece una variable con coste M, esta es una variable artificial y la fila indicadora se ha separado en su parte independiente de M y en el coeficiente de M.

Para cada tabla, seleccione todas las afirmaciones que sean ciertas y responda, cuando proceda, a la pregunta indicada.

a) La solución óptima es única.

b) Existen soluciones óptimas alternativas. ¿Cómo pueden obtenerse?

c) La solución básica factible es degenerada. ¿Por qué?

d) El problema es no acotado. ¿Por qué?

e) Existe una semirrecta de soluciones óptimas. ¿Por qué?

f) El problema es infactible.

g) Es posible mejorar el valor de la función objetivo. ¿Qué elemento debe elegirse como pivote?

Tabla 1

	c_j	-6	-8	0	0	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	b'
0	x_3	$\frac{15}{4}$	0	1	-1	10
-8	x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	10
	ρ_j	-4	0	0	2	-80

Tabla 2

	c_j	1	1	0	0	M	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b'
1	x_1	1	1	1	0	0	1
M	x_5	0	-2	-4	-1	1	2
	$\rho_j^{(0)}$	0	0	-1	0	0	1
	$\rho_j^{(M)}$	0	2	4	1	0	2

Tabla 3

	c_j	-1	3	0	M	0	M	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b'
0	x_5	0	3	-4	4	1	-1	4
-1	x_1	1	1	-1	1	0	0	3
	$\rho_j^{(0)}$	0	4	-1	1	0	0	-3
	$\rho_j^{(M)}$	0	0	0	1	0	1	0

Tabla 4

	c_j	-6	-10	0	0	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	b'
0	x_3	$\frac{19}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	4
-10	x_2	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	3
	ρ_j	0	0	0	2	-30

Tabla 5

	c_j	-15	6	0	0	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	b'
-15	x_1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
6	x_2	0	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
	ρ_j	0	0	0	3	-42

Tabla 6

	c_j	-3	-2	0	0	
c_B	Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	b'
-2	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
-3	x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3
	ρ_j	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	-13

Ejercicio 2.5 (Condiciones sobre una tabla)**.** La siguiente tabla corresponde a un problema de minimización para cuya resolución no ha sido necesario introducir variables artificiales:

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b'
x_3	7	a_1	1	0	a_2	0	b
x_4	-3	-4	0	1	-2	0	3
x_6	a_3	-2	0	0	6	1	5
ρ_j	$-c_1$	$-c_2$	0	0	9	0	-16

Determine las condiciones que deben satisfacer $a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2$ para que se cumpla cada una de las siguientes situaciones:

a) La solución básica factible actual es un óptimo único.

b) La solución actual es óptima, pero existen óptimos alternativos.

c) La solución básica factible actual es degenerada.

d) La solución actual es factible, pero el problema es no acotado.

e) La solución actual es factible y puede mejorarse, o al menos no empeora el valor del objetivo, sustituyendo x_6 por x_1 y obteniendo otra solución básica factible.

f) Existe una semirrecta de soluciones óptimas.

Ejercicio 2.6 (Una variable que acaba de salir)**.** Demuestre que, si una variable básica sale de la base en una iteración del método símplex, no puede volver a entrar en la iteración inmediatamente siguiente, salvo en el caso de que existan soluciones óptimas alternativas.

Ejercicio 2.7 (Una tabla que no puede pertenecer a un ciclo)**.** Demuestre que una tabla de la forma

	c_j	c_{m+1}	c_{m+2}	$\cdots$	c_n	
c_B	Basic	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n	b'
c_1	x_1					0
c_2	x_2					$b'_2 > 0$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
c_m	x_m					$b'_m > 0$
	ρ_j	ρ_{m+1}	ρ_{m+2}	$\cdots$	ρ_n	

no puede formar parte de ningún ciclo del método símplex.

Ejercicio 2.8 (Linealización de valores absolutos)**.** Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = |x_1 + x_2 - 7| \\ \text{sujeto a} & 2x_1 - x_3 \geq 0, \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0, \end{array}$$

donde $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$. Transfórmelo en un problema de programación lineal, introduciendo las variables auxiliares que sean necesarias, y resuélvalo. Justifique por qué la formulación lineal propuesta es equivalente al problema original.

Ejercicio 2.9 (Linealización de una suma de valores absolutos)**.** Transforme en un programa lineal el problema

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & z = |x_1 + x_2 - 7| + |-x_1 + x_3 + 6| & \\ & \quad + |x_1 - 2x_2 + x_3| + |-x_2 + x_3 - 10|, & \\ \text{sujeto a} & 2x_1 - x_3 \geq 0, & \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 0, & \\ & x_2 \geq 0, & \end{array}$$

donde x_1 y x_3 no están restringidas en signo.

Ejercicio 2.10 (Ajuste lineal con desviaciones absolutas)**.** Se desea ajustar el modelo

$$\hat{y} = w_1 z_1 + \cdots + w_n z_n$$

a las observaciones

$$(y_i, z_{1i}, \ldots, z_{ni}), \qquad i = 1, \ldots, m.$$

a) Formule un programa lineal que determine los pesos $w_1, \ldots, w_n$ minimizando la suma de las desviaciones absolutas

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i - \hat{y}_i|.$$

b) Formule otro programa lineal que minimice la máxima desviación absoluta:

$$\max_{1 \leq i \leq m} |y_i - \hat{y}_i|.$$

Las variables $w_1, \ldots, w_n$ no están restringidas en signo.

Ejercicio 2.11 (Solución no trivial de un sistema homogéneo)**.** Sea

$$Ax = 0, \qquad x \geq 0.$$

Formule un programa lineal que permita determinar si este sistema posee alguna solución distinta de la solución trivial.

Ejercicio 2.12 (Existencia de una solución estrictamente positiva)**.** Sea $Ax = b$ un sistema compatible. Formule un programa lineal que permita decidir si existe una solución que satisfaga

$$Ax = b, \qquad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Explique cómo debe interpretarse el valor óptimo del programa propuesto.

Ejercicio 2.13 (Cambios de escala)**.** Sean $\lambda > 0$ y $\mu > 0$. Considere los problemas

$$\begin{array}{lll} & \text{minimizar} & z(x) = c^{\mathrm{t}}x, \\ (P) & \text{sujeto a} & Ax = b, \\ & & x \geq 0, \\ & \text{minimizar} & z'(x) = (\mu c)^{\mathrm{t}}x, \\ (P_{\lambda,\mu}) & \text{sujeto a} & Ax = \lambda b, \\ & & x \geq 0. \end{array}$$

Suponiendo que existe solución óptima, determine la relación entre:

a) los conjuntos de soluciones factibles;

b) los conjuntos de soluciones óptimas;

c) los valores óptimos de ambos problemas.

Ejercicio 2.14 (Regresión mediante programación lineal)**.** Se han obtenido las siguientes mediciones porcentuales en diez muestras de una marca de tabaco:

Muestra	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	1.68	3.02	3.16	1.29	0.12	3.73	2.07
2	2.85	2.08	3.14	2.60	0.50	2.32	1.80
3	2.10	1.89	2.82	2.04	0.23	3.56	3.02
4	7.06	1.94	3.54	3.11	0.26	3.76	3.07
5	1.42	2.15	2.28	1.06	0.68	2.18	1.31
6	2.66	3.53	1.74	2.64	0.50	3.48	2.23
7	1.39	2.11	2.33	3.05	0.39	3.19	1.31
8	2.64	1.62	2.78	1.72	0.50	1.17	1.25
9	2.82	2.20	1.16	2.06	0.42	3.79	2.15
10	3.30	1.97	3.58	3.07	0.54	2.70	1.29

Aquí, Y representa el porcentaje de nicotina y $X_1, \dots, X_6$ los porcentajes de nitrógeno, benzopireno, alcaloides, ácido málico, ácido cítrico y alquitrán, respectivamente.

a) Ajuste un modelo de regresión lineal múltiple minimizando la suma de las desviaciones absolutas.

b) Repita el ajuste minimizando la máxima desviación absoluta.

c) Compare los resultados con los obtenidos mediante mínimos cuadrados.

Ejercicio 2.15 (Una consecuencia obtenida mediante programación lineal)**.** Utilice programación lineal para demostrar que

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 2x_2 \leq 8.$$

Ejercicio 2.16 (Ajuste parabólico mediante desviaciones absolutas)**.** Una batería de diez pruebas de esfuerzo-tensión ha proporcionado los datos siguientes:

Prueba	Esfuerzo Y	Tensión X
1	91	0.001
2	97	0.002
3	108	0.003
4	111	0.005
5	114	0.006
6	110	0.006
7	112	0.009
8	105	0.011
9	98	0.016
10	91	0.017

El diagrama de dispersión sugiere un modelo parabólico

$$\widehat{Y} = a + bX + cX^2.$$

a) Formule un programa lineal que determine el ajuste parabólico minimizando la suma de las desviaciones absolutas.

b) Obtenga el ajuste y compárelo con el correspondiente ajuste por mínimos cuadrados.

2.8 Ejercicios

Ejercicio 2.17 (Resolución mediante el método símplex)**.** Resuelva mediante el método símplex los siguientes problemas.

a)

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ & 7x_1 + 5x_2 \leq 35, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 2x_1 + x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ & x_1 \geq 0, \end{aligned}$$

donde x_2 no está restringida en signo.

c)

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 + x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ & x_1 - x_2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0, \end{aligned}$$

donde x_2 no está restringida en signo.

d)

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + 2x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 4x_2 \leq 15, \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ & 3x_1 - x_2 \leq 11, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ & x_1 + x_2 = 7, \\ & 5x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 = 6, \\ & 3x_1 + x_2 = 12, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_2 \geq 2, \\ & x_1 \geq 1. \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = x_1 + 2x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.18 (Producción y tratamiento de un subproducto)**.** Una planta química fabrica dos productos, A y B, mediante dos procesos I y II. La siguiente tabla contiene los tiempos de producción y los beneficios por unidad vendida:

	A	B
Proceso I	2	3
Proceso II	3	4
Beneficio por unidad	40	100

Se dispone de 16 horas del proceso I y de 24 horas del proceso II.

La producción de B genera, sin coste adicional, dos unidades de un subproducto C por cada unidad de B. Pueden venderse, a lo sumo, 5 unidades de C a 30 euros por unidad. Cada unidad sobrante de C debe destruirse con un coste de 20 euros.

a) Formule un programa lineal que determine el plan de producción de beneficio máximo.

b) Resuélvalo mediante el método símplex.

Ejercicio 2.19 (Actualización de la fila indicadora)**.** Demuestre, partiendo de la definición de coste reducido, que los elementos de la fila indicadora de una tabla del símplex pueden calcularse a partir de la tabla anterior mediante la regla del rectángulo.

Ejercicio 2.20 (Símplex revisado e interpretación geométrica)**.** Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 3x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 \leq 5, \\ & x_1 + x_2 \leq 8, \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Resuélvalo mediante el método símplex revisado.

b) Represente la región factible y señale, sobre ella, los vértices recorridos por el método.

c) Indique en cada iteración la base, la variable entrante, la variable saliente y la dirección de desplazamiento.

Ejercicio 2.21 (Detección de un problema no acotado)**.** Utilice el método símplex para demostrar que el programa lineal

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 3x_2, \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ & -x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

es no acotado. A partir de la tabla final, obtenga una solución factible cuyo valor objetivo sea mayor que 2000.

Ejercicio 2.22 (Producción y análisis de sensibilidad)**.** En un laboratorio se fabrican cuatro productos. La producción diaria está limitada por el espacio disponible en el almacén y por la mano de obra. Los datos relevantes son:

	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibilidad
Espacio ocupado	10	30	80	40	900
Trabajadores	2	1	1	3	80
Coste	20	30	45	58	
Precio de venta	30	50	85	90	

a) Determine el plan de producción de beneficio máximo.

b) Calcule los precios sombra de los dos recursos y explique su significado.

c) Una materia prima utilizada en los productos P_1 y P_3 es inestable en precio. Cada unidad de P_1 utiliza 0.1 toneladas de esta materia prima y cada unidad de P_3 utiliza 0.2 toneladas.

   El precio actual es de 100 euros por tonelada; por ejemplo, el coste actual de P_1 puede escribirse como

   $$20 = 10 + 0.1(100).$$

   Sea λ el precio futuro de la materia prima, sabiendo que $80 \leq \lambda \leq 125$. Determine el plan de producción óptimo para cada valor de λ.

d) Determine el intervalo de valores del espacio disponible para el que la base óptima obtenida en el primer apartado continúa siendo factible y óptima.

e) El laboratorio puede alquilar 150 m^2 adicionales de almacén con un coste diario de 70 000 euros. ¿Debe alquilarlos? Si la respuesta es afirmativa, determine el nuevo plan óptimo.

f) Analice qué ocurre con la solución óptima si la empresa pierde 20 trabajadores.

Ejercicio 2.23 (Destilación de crudos)**.** Una compañía produce gasóleo (G), gasolina sin plomo (P) y gasolina súper 97 (S) a partir de dos tipos de crudo, C_1 y C_2.

La tecnología nueva T_n utiliza, en cada sesión de destilación, 7 unidades de C_1 y 12 de C_2, y produce 8 unidades de G, 6 de P y 5 de S. La tecnología antigua T_a utiliza 10 unidades de C_1 y 8 de C_2, y produce 10 unidades de G, 7 de P y 4 de S.

Durante el próximo mes deben producirse, al menos, 900 unidades de G, 300 de P y entre 800 y 1700 unidades de S. Se dispone de 1400 unidades de C_1 y 2000 de C_2. Los beneficios por unidad producida son:

Producto	G	P	S
Beneficio por unidad	4	6	7

Formule un programa lineal que determine el número de sesiones de cada tecnología que maximiza el beneficio.

Ejercicio 2.24 (Problema de la dieta)**.** Se desea preparar una dieta de coste mínimo que contenga entre 26 y 32 unidades de vitamina A, al menos 25 unidades de vitamina B, al menos 30 unidades de vitamina C y, a lo sumo, 14 unidades de vitamina D.

La composición y el coste de seis alimentos son:

Alimento	Vitaminas A	B	C	D	Coste por unidad
1	1	1	0	1	10
2	1	2	1	0	14
3	0	1	2	0	12
4	3	1	0	1	18
5	2	1	2	0	20
6	1	0	2	1	16

Formule un programa lineal que determine la cantidad de cada alimento que debe utilizarse.

Ejercicio 2.25 (Producción de gasolinas)**.** Una compañía produce gasolinas Súper, Normal y Euro mezclando tres crudos, A, B y C. La proporción de tres componentes en cada crudo es:

	Componente 1	Componente 2	Componente 3
A	80%	10%	5%
B	45%	30%	20%
C	30%	40%	25%

Las especificaciones de las gasolinas son:

	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Súper	$\geq 60\%$	$\leq 25\%$	$\geq 10\%$
Normal	$\geq 50\%$	$\leq 40\%$	$\leq 25\%$
Euro	$\leq 40\%$	$\geq 35\%$	$\geq 20\%$

Los costes por barril de los crudos A, B y C son, respectivamente, 65, 50 y 45 euros. El presupuesto diario es de cinco millones de euros. La disponibilidad diaria de B y C está limitada a 3000 y 7000 barriles, respectivamente, y deben comprarse al menos 2500 barriles de A.

Deben producirse diariamente 2000 barriles de gasolina Súper y 2500 de gasolina Normal. Formule un programa lineal que maximice la producción de gasolina Euro.

Ejercicio 2.26 (Elaboración de zumos)**.** Una empresa produce zumos de naranja, pera, limón, tomate y manzana, así como dos combinados denominados H y G. Los datos disponibles son:

Fruta	Disponibilidad máxima (kg)	Coste (euros/kg)	Precio de venta (euros/l)
Naranja (N)	32000	0.94	1.29
Pera (P)	25000	0.87	1.25
Limón (L)	21000	0.73	1.10
Tomate (T)	18000	0.47	0.88
Manzana (M)	27000	0.68	0.97

El combinado H, cuyo precio es de un euro por litro, debe contener:

- a lo sumo un 50% de manzana;
- a lo sumo un 20% de pera;
- al menos un 10% de limón.

El combinado G, cuyo precio es de 1.20 euros por litro, contiene exactamente un 40% de naranja, un 35% de limón y un 25% de pera.

Por cada kilogramo de fruta se obtiene un litro de zumo y se vende toda la producción. Formule un programa lineal que determine el plan de producción de beneficio máximo.

Ejercicio 2.27 (Planificación de la producción)**.** Una empresa fabrica filtros formados por una capa intermedia de calidad A y dos capas exteriores de calidad B. Dispone semanalmente de 700 toneladas de fibra de vidrio y 900 toneladas de resina.

La empresa posee cuatro plantas. Los consumos y producciones por operación son:

	Toneladas requeridas		Capas producidas	
Planta	Vidrio	Resina	A	B
1	15	19	2	5
2	14	20	3	7
3	16	15	5	4
4	12	18	4	4

Las operaciones pueden realizarse total o parcialmente. Formule un programa lineal que determine cuántas operaciones deben realizarse en cada planta para maximizar el número de filtros completos fabricados.

Ejercicio 2.28 (Optimización de mezclas en una destilería)**.** Una destilería dispone de 200 barriles diarios de malta propia y puede comprar malta a dos distribuidores, A y B, a costes de 10 y 12 euros por barril. Las compras máximas son de 300 y 500 barriles diarios, respectivamente.

La malta puede venderse sin procesar o destilarse. El destilador puede procesar, a lo sumo, 700 barriles diarios. Los rendimientos del proceso son:

	Malta enriquecida 1	Malta enriquecida 2
Malta propia	0.3	0.6
Malta A	0.4	0.4
Malta B	0.7	0.1

La malta sin procesar se vende a 13 euros por barril, con una demanda máxima de 110 barriles diarios. El sobrante debe destruirse con un coste de un euro por barril.

Con las maltas destiladas se elaboran dos productos:

- un producto de alta calidad H, vendido a 19 euros por barril, que debe contener al menos un 70% de malta enriquecida 1;
- un producto de baja calidad L, vendido a 15 euros por barril, que puede contener, a lo sumo, un 55% de malta enriquecida 2.

La destilería debe producir 215 barriles diarios de H y obtener un beneficio de, al menos, 300 euros diarios. Su objetivo es minimizar la producción de L. Formule el correspondiente programa lineal.

Ejercicio 2.29 (Planificación de una planta química)**.** Una planta fabrica tres sustancias, A, B y C, utilizando carbón, electricidad, agua, gasóleo y mano de obra.

Puede obtener hasta 600 unidades diarias de carbón de sus propias minas a 20 euros por unidad. El carbón adicional se compra a 50 euros por unidad. Las tarifas eléctricas son:

- 340 euros por unidad para las primeras 2000 unidades;
- 510 euros por unidad para las siguientes 800;
- 630 euros por unidad a partir de 2800 unidades.

El agua cuesta 70 euros por unidad hasta 900 unidades y 85 euros por unidad a partir de esa cantidad. El gasóleo cuesta 49 euros por unidad y su consumo diario no puede superar las 3000 unidades.

Se dispone de 750 horas ordinarias de trabajo, sin coste adicional, y de hasta 220 horas extraordinarias, a 152 euros por hora.

	Carbón	Electricidad	Agua	Gasóleo	Horas	Ingreso por unidad
A	0.6	3.2	1.0	2.0	2.0	2900 para las primeras 85, 2400 para las restantes
B	0.9	2.5	0.26	2.4	3.0	3200 hasta un máximo de 95
C	1.2	4.0	1.7	3.0	2.0	3800

Formule un programa lineal que determine el plan de producción de beneficio máximo.

Ejercicio 2.30 (Control de producción e inventarios)**.** Un alimento se fabrica refinando y mezclando cinco sustancias: dos artificiales, a_1, a_2, y tres naturales, n_1, n_2, n_3. Los precios por tonelada durante el primer semestre son:

	a_1	a_2	n_1	n_2	n_3
Enero	130	140	150	130	135
Febrero	150	150	130	110	135
Marzo	130	160	150	120	115
Abril	140	130	140	140	145
Mayo	120	140	170	130	125
Junio	110	120	160	100	155

El alimento se vende a 170 euros por tonelada. Cada mes pueden refinarse, a lo sumo, 320 toneladas de sustancias artificiales y 350 de sustancias naturales. El refinado se realiza sin pérdida de peso y sin coste.

Pueden almacenarse hasta 1360 toneladas de cada sustancia, con un coste de seis euros por tonelada y mes. No pueden almacenarse ni el alimento terminado ni las sustancias ya refinadas.

La dureza del alimento debe estar entre 5 y 7 unidades. Las durezas de las sustancias son:

	a_1	a_2	n_1	n_2	n_3
Dureza	9.5	7.1	3.4	5.2	4.8

Al comenzar enero hay 730 toneladas de cada sustancia y se desea disponer de ese mismo inventario al finalizar junio.

Formule un programa lineal que determine la política de compras, producción e inventarios de beneficio máximo.

Ejercicio 2.31 (Planificación de producción e inventarios)**.** Una empresa fabrica cuatro tipos de discos cuyas demandas se encuentran entre unos límites mínimos y máximos. Los tiempos de fabricación de los cuatro modelos son diferentes.

En el proceso se utilizan cinco materias primas comunes a todos los modelos. Existen tres suministradores, con precios distintos, y la empresa desea comprar a los tres dentro de determinados límites mínimos y máximos. La capacidad de almacenamiento de materias primas es limitada, aunque no existe limitación para almacenar los discos terminados.

Se conocen los costes de las materias primas, los costes de mano de obra y los gastos de fabricación de cada tipo de disco.

Defina los parámetros necesarios y formule un modelo de programación lineal que minimice el coste total de satisfacer la demanda.

Ejercicio 2.32 (Planificación agrícola)**.** Un agricultor dispone de 75 hectáreas para cultivar trigo y girasol. Debe producir, al menos, 80 kilos de trigo y 60 kilos de girasol.

Cada hectárea dedicada al trigo produce 5 kilos, mientras que cada hectárea dedicada al girasol produce 4 kilos. El trigo se vende a 30 euros por kilo y el girasol a 50 euros por kilo.

La cosecha de una hectárea de trigo necesita 6 horas de trabajo y la de una hectárea de girasol, 10 horas. Se dispone de 352 horas de trabajo, con un coste de 10 euros por hora.

Formule un programa lineal que determine el reparto de las hectáreas entre ambos cultivos y maximice el beneficio, suponiendo que se vende toda la producción.

2.9 Ejercicios

Ejercicio 2.33 (Problema del transporte)**.** Un determinado artículo se encuentra almacenado en los almacenes $A_1, \dots, A_m$. El almacén A_i dispone de a_i unidades del artículo. Estas unidades deben enviarse a los mercados $M_1, \dots, M_n$, cuyas demandas son $b_1, \dots, b_n$, respectivamente.

El coste de transportar una unidad desde el almacén A_i hasta el mercado M_j es c_{ij}.

a) Defina las variables de decisión y formule un modelo que minimice el coste total de transporte, suponiendo que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

b) Demuestre que, cuando todos los almacenes pueden abastecer a todos los mercados, el sistema de restricciones del problema es compatible si y solo si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

c) Compruebe que una de las ecuaciones del sistema es redundante y que la matriz de coeficientes tiene rango $m + n - 1$.

d) Explique cómo puede equilibrarse el problema introduciendo un almacén ficticio cuando

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Interprete el valor de las variables correspondientes a dicho almacén en una solución óptima.

e) Explique cómo se modifica el modelo introduciendo un mercado ficticio cuando

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

f) Suponga que las existencias a_i y las demandas b_j son números enteros. Aunque las variables representan cantidades indivisibles, considere la relajación lineal del problema. Investigue por qué existe una solución óptima entera de dicha relajación.

Ejercicio 2.34 (Problema de asignación)**.** Se dispone de n trabajos y n máquinas. Cada trabajo debe realizarse en una única máquina y cada máquina debe realizar exactamente un trabajo. El coste, o tiempo, de realizar el trabajo i en la máquina j es c_{ij}.

a) Defina variables binarias y formule el problema de encontrar la asignación de coste total mínimo.

b) Compruebe que el problema de asignación es un caso particular del problema del transporte en el que
$$a_i = b_j = 1, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

c) Sustituya las condiciones de integridad por
$$x_{ij} \geq 0.$$
Explique por qué la relajación lineal sigue teniendo una solución óptima entera.

d) Suponga ahora que hay más máquinas que trabajos. Modifique el modelo para que cada trabajo se asigne a una máquina y ninguna máquina realice más de un trabajo.

Ejercicio 2.35 (Problema del agente viajero con cinco ciudades)**.** Un agente comercial debe partir de la ciudad 1, visitar exactamente una vez cada una de las ciudades $2, 3, 4, 5$ y regresar finalmente a la ciudad de partida.

El coste de viajar directamente desde la ciudad i hasta la ciudad j es c_{ij}. Para $i \neq j$, se define
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el agente viaja directamente de } i \text{ a } j, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

No se permite viajar de una ciudad a ella misma.

a) Formule el problema utilizando únicamente las restricciones que exigen que desde cada ciudad se salga hacia una única ciudad y que a cada ciudad se llegue desde una única ciudad.

b) Compruebe que las restricciones anteriores no son suficientes. En particular, demuestre que
$$x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1, \qquad x_{45} = x_{54} = 1$$
satisface las restricciones de asignación, pero no representa un recorrido válido del agente viajero.

c) Añada las restricciones
$$x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \qquad 1 \leq i < j \leq 5,$$
que impiden la aparición de ciclos de longitud 2.

d) Demuestre que, en el caso de cinco ciudades, las restricciones de los apartados anteriores garantizan la existencia de un único ciclo que contiene las cinco ciudades.

Indicación: estudie las posibles descomposiciones de una permutación de cinco elementos en ciclos, teniendo en cuenta que no se permiten ciclos de longitud 1 ni de longitud 2.

e) Compruebe que el resultado anterior no se generaliza a seis ciudades, construyendo una solución formada por dos ciclos disjuntos de longitud 3.

f) Para un número general n de ciudades, introduzca las restricciones de eliminación de subciclos

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \qquad S \subsetneq \{1, \dots, n\}, \quad 2 \leq |S| \leq n - 1.$$

Explique por qué estas restricciones impiden que aparezca un ciclo contenido completamente en un subconjunto propio de las ciudades.

Ejercicio 2.36 (Problema de corte óptimo)**.** Una fábrica de papel produce bobinas de longitud 1000 metros y anchura 100 centímetros. Para la semana siguiente debe atender el pedido

Anchura de la bobina	20	30	40	70
Número de bobinas	320	365	480	176

Todas las bobinas solicitadas tienen una longitud de 1000 metros. Las bobinas de un metro de anchura se cortan longitudinalmente para obtener las anchuras requeridas. Los sobrantes pueden reciclarse y su coste se considera despreciable.

Un *patrón de corte* es un vector

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{Z}_+^4$$

que satisface

$$20p_1 + 30p_2 + 40p_3 + 70p_4 \leq 100.$$

a) Enumere los patrones de corte maximales, es decir, aquellos a los que no puede añadirse ninguna bobina más sin superar los 100 centímetros de anchura.

b) Para cada patrón p, defina una variable entera y_p que represente el número de bobinas de un metro que se cortan utilizando dicho patrón.

c) Formule un problema de programación lineal entera que minimice el número total de bobinas de un metro necesarias para satisfacer el pedido.

d) Explique por qué, en este problema, no sería correcto limitarse a resolver la relajación lineal y redondear por separado los valores obtenidos.

Ejercicio 2.37 (Planificación de vigilantes)**.** Una empresa de seguridad debe cubrir las necesidades de vigilancia de un aeropuerto durante los seis periodos de cuatro horas en los que se divide el día:

Periodo	Intervalo horario	Número mínimo de vigilantes
1	00:00–04:00	27
2	04:00–08:00	30
3	08:00–12:00	52
4	12:00–16:00	56
5	16:00–20:00	67
6	20:00–24:00	48

Cada vigilante trabaja durante ocho horas consecutivas. Los turnos pueden comenzar a las 00:00, 04:00, 08:00, 12:00, 16:00 o 20:00.

a) Defina una variable entera x_i que represente el número de vigilantes cuyo turno comienza al iniciarse el periodo i.

b) Formule un modelo de programación lineal entera que minimice el número total de vigilantes contratados y cubra las necesidades de todos los periodos.

   Tenga en cuenta que los vigilantes cuyo turno comienza en el periodo 6 trabajan durante los periodos 6 y 1.

c) Escriba explícitamente las seis restricciones de cobertura.

d) Resuelva la relajación lineal y estudie si proporciona directamente una solución entera.

Ejercicio 2.38 (Fabricación de tejidos)**.** Un fabricante de tejidos utiliza una misma máquina para producir dos artículos, A y B. La máquina está disponible durante 170 horas al mes. Su ritmo de producción es de 50 unidades de A por hora y de 80 unidades de B por hora. Cada unidad de A proporciona un beneficio de 30 euros y cada unidad de B, uno de 20 euros.

La capacidad de absorción del mercado es limitada: durante un mes pueden venderse, a lo sumo, 7000 unidades de A y 10000 unidades de B.

a) Formule un problema de programación lineal que permita determinar el plan mensual de producción que maximiza el beneficio.

b) Resuelva el problema gráficamente e interprete la solución obtenida.

c) Indique qué restricciones son activas en la solución óptima y cuánto tiempo de máquina queda sin utilizar.

Ejercicios de resolución y análisis de sensibilidad

Ejercicio 2.39 (La empresa Meloquedotodo)**.** Una empresa fabrica cuatro artículos, A_1, A_2, A_3 y A_4, utilizando tres materias primas, M_1, M_2 y M_3. En la tabla se indican los requerimientos por unidad de producto, los beneficios unitarios y las existencias previstas para el próximo mes.

	M_1	M_2	M_3	Beneficio unitario
A_1	8	6	5	1750
A_2	6	5	4	1600
A_3	3	2	2	900
A_4	7	8	6	2000
Existencias	25 001	16 867	16 669	

La empresa se ha comprometido a fabricar al menos 500 unidades de A_2. Además, no puede fabricar más de 400 unidades de A_1 ni más de 600 de A_4.

a) Formule el problema y determine el plan mensual de producción que proporciona el máximo beneficio.

b) La empresa puede recibir gratuitamente 1000 unidades de una sola de las tres materias primas. ¿Cuál debería elegir? Justifique la respuesta y compruebe que la información de sensibilidad utilizada sigue siendo válida para un aumento de ese tamaño.

c) La empresa puede pagar para reducir en 200 unidades el mínimo contractual de producción de A_2, que pasaría de 500 a 300. ¿Cuál es la cantidad máxima que le interesaría pagar por conseguirlo?

d) Escriba el problema dual y calcule su solución óptima mediante el teorema de holgura.

Ejercicio 2.40 (Una carpintería)**.** Una carpintería fabrica sillas, mesas, mesillas y sillones. Para ello utiliza madera, tela y pintura. Los requerimientos por unidad, los beneficios unitarios y las existencias disponibles para el próximo mes son los siguientes:

	Madera	Tela	Pintura	Beneficio unitario
Sillas	3	1	2	150
Mesas	5	0	3	350
Mesillas	4	0,5	1,5	250
Sillones	6	4	2,5	500
Existencias	260 kg	102 m	200 kg	

Se deben fabricar, al menos, 13 sillas, 10 mesas, 10 mesillas y 7 sillones.

a) Formule y resuelva el problema que determina el plan mensual de producción de beneficio máximo. Explique el significado de los valores de las variables de holgura en la solución óptima.

b) La carpintería puede comprar un lote de 4 metros de tela por 67 euros. ¿Debería adquirirlo? Justifique que el precio sombra empleado es válido para una variación de 4 metros.

c) El carpintero desea aumentar el beneficio unitario de las mesas o el de las sillas. Estudie por separado la variación admisible de cada uno de estos dos coeficientes para que la base óptima no cambie y explique qué información permite obtener este análisis.

Ejercicio 2.41 (Cultivo de trigo y cebada)**.** Un agricultor cultiva cebada y trigo en una granja de 75 hectáreas. Debe atender una demanda mínima de 60 kg de cebada y 80 kg de trigo. Cada hectárea dedicada a la cebada produce 5 kg, mientras que cada hectárea dedicada al trigo produce 4 kg. La cebada se vende a 30 euros por kilogramo y el trigo a 50 euros por kilogramo; se supone que se vende toda la producción.

La cosecha de una hectárea de cebada requiere 5 horas de trabajo y la de una hectárea de trigo, 10 horas. Una cooperativa se ocupa de la recolección. Se dispone de 450 horas de trabajo, a un coste de 10 euros por hora.

a) Formule y resuelva el problema que determina cuántas hectáreas deben dedicarse a cada cereal para maximizar el beneficio neto. Explique el significado de las variables de holgura en la solución óptima.

b) Calcule el precio sombra asociado a la demanda mínima de trigo. Interprete su signo y determine para qué variaciones de dicha demanda es válida esa información.

c) La cooperativa ofrece hasta 50 horas adicionales de trabajo. Determine cuánto convendría pagar, como máximo, por cada una de ellas. Tenga en cuenta que el valor marginal puede dejar de ser constante antes de alcanzar las 50 horas.

Ejercicio 2.42 (La compañía Gapco)**.** La compañía Gapco dispone diariamente de 320 horas ordinarias de mano de obra y de 350 unidades de materia prima para fabricar dos productos. Puede utilizar, además, hasta 10 horas extraordinarias al día, con un coste de 2 dólares por hora.

Una unidad del producto 1 requiere una hora de trabajo y tres unidades de materia prima; una unidad del producto 2 requiere dos horas de trabajo y una unidad de materia prima. Antes de descontar el coste de las horas extraordinarias, los beneficios unitarios son de 10 y 12 dólares, respectivamente.

a) Formule y resuelva el problema. Utilice h para representar las horas extraordinarias y numere, en este orden, las restricciones de mano de obra, materia prima y cota $h \leq 10$.

b) Calcule los precios sombra π_1, π_2 y π_3 y explique su significado. ¿Hay alguna razón para que π_1 y π_3 deban ser iguales?

c) ¿Cuál es el precio máximo por hora extraordinaria que Gapco estaría dispuesta a pagar?

d) Gapco puede adquirir 100 unidades adicionales de materia prima a 1,5 dólares por unidad. ¿Le conviene hacerlo? Compruebe que el precio sombra utilizado es válido para esta variación.

e) Resuelva de nuevo el problema si la disponibilidad diaria de materia prima se reduce a 200 unidades.

f) Resuelva de nuevo el problema si solo pueden utilizarse 8 horas extraordinarias al día.

Ejercicio 2.43 (Producción en un laboratorio)**.** Un laboratorio fabrica cuatro productos, P_1, P_2, P_3 y P_4. La producción diaria está limitada por el espacio de almacén y por la mano de obra disponibles. La tabla contiene el espacio ocupado por cada unidad, las unidades de mano de obra necesarias, los costes de fabricación y los precios de venta, estos dos últimos expresados en dólares.

	P_1	P_2	P_3	P_4	Disponibilidad
Espacio	10	30	80	40	900
Mano de obra	2	1	1	3	80
Coste	20	30	45	58	
Precio de venta	30	50	85	90	

a) Formule el problema y determine el plan de producción de beneficio máximo.

b) Calcule los precios sombra de los dos recursos y explique su significado.

c) Una materia prima utilizada en P_1 y P_3 tiene un precio inestable. Cada unidad de P_1 utiliza 0,1 toneladas y cada unidad de P_3, 0,2 toneladas. Su precio actual es de 100 dólares por tonelada; en particular, los costes actuales pueden escribirse como

$$20 = 10 + 0{,}1 \cdot 100, \qquad 45 = 25 + 0{,}2 \cdot 100.$$

Sea λ el precio futuro por tonelada, con $80 \leq \lambda \leq 125$. Determine el plan óptimo para cada valor de λ.

d) Determine el intervalo de valores del espacio disponible para el que la base óptima obtenida en el primer apartado continúa siendo factible y óptima.

e) El laboratorio puede alquilar 150 m^2 adicionales de almacén por 70 000 dólares diarios. ¿Le conviene hacerlo? Si la respuesta es afirmativa, determine el nuevo plan óptimo.

f) Determine qué ocurre con la solución óptima si la disponibilidad de mano de obra disminuye en 20 unidades.

Ejercicio 2.44 (Fabricación de relojes)**.** Una empresa fabrica tres tipos de relojes, R_1, R_2 y R_3. La fabricación requiere tres actividades. En la tabla se indican los tiempos necesarios por reloj y el tiempo semanal disponible de cada actividad.

	R_1	R_2	R_3	Tiempo disponible
Ensamblar mecanismos	6	4	4	400
Labrar cajas de madera	5	4	5	500
Enviar	1	2	4	100

La venta de cada reloj proporciona un beneficio de 250 euros para R_1, 225 euros para R_2 y 275 euros para R_3.

a) Formule y resuelva el problema que determina el plan semanal de producción de beneficio máximo. Escriba también el problema dual y resuélvalo sin aplicar el método símplex ni el teorema de holgura.

b) ¿Queda tiempo disponible sin utilizar en alguna actividad?

c) ¿Cuánto debería pagar la empresa, como máximo, por una hora adicional para ensamblar mecanismos?

d) ¿Cuánto debería pagar, como máximo, por una hora adicional para labrar cajas de madera?

e) Se plantea transferir horas de la actividad de labrar cajas a la de ensamblar mecanismos. Estudie el problema cuando las disponibilidades de estas dos actividades pasan a ser $400 + \theta$ y $500 - \theta$, respectivamente, para $0 \leq \theta \leq 300$.

f) Determine el intervalo de valores del beneficio unitario c_3 para el que la base óptima obtenida inicialmente continúa siendo óptima.

g) Partiendo del cuadro óptimo, resuelva el problema cuando $c_3 = 315$.

h) Calcule todas las soluciones duales óptimas mediante el teorema de holgura.

La holgura mide la separación del punto respecto de la frontera, con una escala determinada por los coeficientes de la restricción.

Sea $a = (a_1, \dots, a_n)^t \neq 0$ y consideremos el hiperplano

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : a^t y = b_1\}.$$

Para un punto factible x, la holgura es

$$s = b_1 - a^t x \geq 0.$$

Es decir, mide cuánto falta al valor de la expresión $a^t x$ para alcanzar b_1.

Su relación con la distancia euclídea es

$$\boxed{s = \|a\|_2 \ \mathrm{dist}(x, H).}$$

Por tanto, si el vector normal a tiene longitud uno, la holgura coincide con la distancia.

Para verlo geométricamente, nos desplazamos desde x hacia la frontera siguiendo la dirección normal unitaria $u = a/\|a\|_2$. Al recorrer una distancia t,

$$a^t(x + tu) = a^t x + t\|a\|_2.$$

Llegamos al hiperplano cuando

$$t\|a\|_2 = b_1 - a^t x = s,$$

de donde $t = s/\|a\|_2$.

Por ejemplo, para la restricción

$$3x_1 + 4x_2 \leq 10,$$

el punto $(0, 0)$ tiene holgura $s = 10$, mientras que su distancia a la recta frontera es $10/5 = 2$.

Esto también explica que la holgura dependa de cómo escribamos la restricción: si multiplicamos ambos miembros por $\lambda > 0$, la holgura queda multiplicada por λ, aunque el semiespacio y la distancia a su frontera sean los mismos.

Capítulo 3

Apéndice

3.1 Sistemas de ecuaciones equivalentes

Teorema 3.1.1. *Sean $A, \widehat{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $\operatorname{rg}(A) = m$, y sean $b, \hat{b} \in \mathbb{R}^m$. Si los sistemas*

$$Ax = b, \qquad \widehat{A}x = \hat{b}$$

son equivalentes, existe una única matriz invertible $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tal que

$$\widehat{A} = MA, \qquad \hat{b} = Mb.$$

Observación

Es una demostración alternativa a la que vimos en el capítulo 1 usando espacio fila e inversa por la derecha

Demostración. La matriz A , tiene asociada la aplicación lineal (usaremos el mismo nombre para la aplicación)

$$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad A(x) = Ax.$$

Igualmente para $\hat{A}$. El teorema de la dimensión (teorema del rango) dice $n = dim(kerA) + rg(A)$ (el $rg(A)$ es la dimensión de la imagen de la aplicación lineal A.). En este caso, $rg(A) = m$, esto es, las columnas de A generan R^m.

1. Los núcleos de ambas aplicaciones coinciden. Como $\operatorname{rg}(A) = m$, el sistema $Ax = b$ es compatible. Sea x^0 una solución común a ambos sistemas. Entonces

$$\begin{aligned} d \in \ker A &\iff A(x^0 + d) = b \\ &\iff \widehat{A}(x^0 + d) = \hat{b} \\ &\iff d \in \ker \widehat{A}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\ker A = \ker \widehat{A}$ y $\operatorname{rg}(\widehat{A}) = m$.

2. Los espacios fila coinciden. Como ya se comentó más arriba, $a_i \in \mathbb{R}^n$ es el vector cuyas coordenadas son los elementos de la fila i-ésima de A. Así, dicha fila se escribe a_i^{T}, y el espacio fila es el subespacio generado por $a_1, \dots, a_m$.

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Un vector v es ortogonal a todas las filas si y solo si $Av = 0$. En consecuencia,

$$\mathrm{Row}(A)^\perp = \ker A, \qquad \mathrm{Row}(A) = (\ker A)^\perp.$$

La igualdad de núcleos da $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(\widehat{A})$.

3. Construimos una inversa por la derecha. Como A tiene rango m, sus filas son linealmente independientes y, por tanto, el $ker(A^t) = \{0\}$. Lo mismo le ocurre a la matriz AA^t. En efecto, para $y \neq 0$,

$$y^t AA^t y = \|A^t y\|^2 > 0,$$

ya que A^t es inyectiva. Puesto que esta matriz es cuadrada, es invertible. Definimos

$$R = A^t(AA^t)^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Entonces $AR = I_m$. Esta matriz es la pseudoinversa de Moore–Penrose de A en el caso de rango completo por filas.

La matriz $H = RA$ satisface

$$H^2 = R(AR)A = RA = H, \qquad H^t = H.$$

Además, su imagen está contenida en $\mathrm{Row}(A)$ y, si $w = A^t y$,

$$Hw = A^t(AA^t)^{-1}AA^t y = w.$$

Por tanto, H es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{Row}(A)$, tiene rango m y proporciona la descomposición

$$v = Hv + (I_n - H)v,$$

con $Hv \in \mathrm{Row}(A)$ e $(I_n - H)v \in \ker A$. Los dos sumandos son ortogonales.

4. Construimos la matriz de transformación. Tomamos

$$M = \widehat{A}R = \widehat{A}A^t(AA^t)^{-1}.$$

Como las filas de $\widehat{A}$ pertenecen a $\mathrm{Row}(A)$ y H es simétrica, se cumple $\widehat{A}H = \widehat{A}$. Así,

$$MA = \widehat{A}RA = \widehat{A}H = \widehat{A}.$$

Usando la solución común x^0,

$$Mb = MAx^0 = \widehat{A}x^0 = \hat{b}.$$

La matriz M es invertible, pues

$$m = \mathrm{rg}(\widehat{A}) = \mathrm{rg}(MA) \leq \mathrm{rg}(M) \leq m.$$

Finalmente, si $M_1A = M_2A$, al multiplicar por R a la derecha obtenemos $M_1 = M_2$. Esto prueba la unicidad. □

Observación

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ admite una inversa por la derecha si y solo si $\operatorname{rg}(A) = m$: la suficiencia se acaba de probar, y la necesidad se deduce de $m = \operatorname{rg}(AR) \leq \operatorname{rg}(A)$. Para una inversa por la derecha arbitraria, RA es idempotente, pero no tiene por qué ser simétrica. La ortogonalidad anterior corresponde a la elección concreta $R = A^{\mathsf{t}}(AA^{\mathsf{t}})^{-1}$.

3.2 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule

$$R = A^{\mathsf{t}}(AA^{\mathsf{t}})^{-1}, \qquad H = RA.$$

Identifique geométricamente la proyección H. Compare con la inversa por la derecha $R_0 = (1, 0)^{\mathsf{t}}$: ¿es ortogonal la proyección R_0A?