Consideremos el problema de programación lineal que consiste en:

$$\begin{aligned} &\min\ z(x) = c^t x \\ &\text{s. a.}:\ Ax = b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Suponemos que los primeros m vectores columnas de forman una matriz identidad $(A_1 \dots A_m) = I,$

y que el vector de la derecha es no negativo $b \geq 0.$

Escribamos esto en forma de tabla:

$$\begin{array}{c|cccccccc|c}
\bar{x} & x_1 & \dots & x_l & \dots & x_m & x_{m+1} & \dots & x_n & \\
\hline
x_1 & a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1m} & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_l & a_{l1} & \dots & a_{ll} & \dots & a_{lm} & a_{l(m+1)} & \dots & a_{ln} & b_l \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_m & a_{m1} & \dots & a_{ml} & \dots & a_{mm} & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} & b_m \\
\hline
 & & & & & & & & & z(\bar{x})
\end{array}$$

donde $\bar{x} = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ y $z(\bar{x}) = c_1 b_1 + \dots + c_m b_m.$

La ecuación i-ésima es: $x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j = b_i$

Sea ***x*** una solución factible cualquiera. Entonces

$$z(x) - z(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} c_i b_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \left(x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \right) x_j$$

En definitiva $z(x) - z(\bar{x}) = \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c}_j x_j$

donde $\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij},$ son los elementos de la fila indicadora.

La "$^-$" de $\bar{c}_j$ hace referencia a $\bar{x}$

Teorema. En un problema de tipo minimizar, si los elementos de la fila indicadora correspondientes a una determinada solución son no negativos, entonces dicha solución es óptima.

(La demostración se deja al lector)

Supongamos ahora que queremos obtener un sistema de ecuaciones equivalente a este, de manera que el vector columna de la variable x_k pase ser vector de la matriz identidad que tiene un 1 en el lugar l-ésimo.
Supondremos que la coordenada l-ésima de dicho vector es positiva, aunque las operaciones que vamos a ejecutar en el sistema de ecuaciones serían igualmente válidas si fuera negativo.

$\bar{x}$	x_1	$\ldots$	x_l	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n	
x_1	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$a_{1(m+1)}$	$\ldots$	a_{1k}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$a_{l(m+1)}$	$\ldots$	a_{lk}	$\ldots$	a_{ln}	b_l
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$a_{m(m+1)}$	$\ldots$	a_{mk}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
f. i.	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\bar{c}_{m+1}$	$\ldots$	$\bar{c}_k$	$\ldots$	$\bar{c}_n$	$z(\bar{x})$

Denotemos el nuevo sistema de ecuaciones con primas.

La l-ésima ecuación del nuevo sistema, e_l' **, será:** $$e_l' = \frac{e_l}{a_{lk}}$$

Para las demás nos queda: $$e_i' = e_i - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} e_l \quad \text{si} \quad i \neq l$$

Así , si $i \neq l$ **y** $j \neq k,$ **se tiene que** $$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} a_{lj}.$$

Por razones obvias, al elemento a_{lk} lo llamaremos elemento pivote
y a todo el conjunto de operaciones, 'pivot operation' o cambio de x_k por x_l.

Tras las operaciones [cambio(l,k), en términos del programa de SAGE], el nuevo sistema en forma de tabla

x'	x_1	$\ldots$	x_l	$\ldots$	x_m	x_{m+1}	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n	
x_1	1	$\ldots$	$-a_{1k}/a_{lk}$	$\ldots$	0	$a'_{1(m+1)}$	$\ldots$	0	$\ldots$	a'_{1n}	b'_1
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	$\ldots$	$1/a_{lk}$	$\ldots$	0	$a_{l(m+1)}/a_{lk}$	$\ldots$	1	$\ldots$	a_{ln}/a_{lk}	b_l/a_{lk}
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\ldots$	$-a_{mk}/a_{lk}$	$\ldots$	1	$a'_{m(m+1)}$	$\ldots$	0	$\ldots$	a'_{mn}	b'_m
f. i.	0	$\ldots$	c'_l	$\ldots$	0	c'_{m+1}	$\ldots$	0	$\ldots$	c'_n	$z(x')$

En ella ya se han efectuado algunos cálculos. Obsérvese el cambio en el grupo de las variables básicas.

Existe una regla nemotécnica para recordar estas cuentas: Para calcular a'_{1n} tenemos que utilizar los números que están resaltados en verde. Se puede observar que estos 4 números podrían ser los vértices de un supuesto rectángulo. Así el elemento requerido se calcula restando del que está en esa posición, el resultado del producto de la otra diagonal y dividir por el pivote.

$$a'_{1n} = a_{1n} - \frac{a_{1k}}{a_{lk}} a_{ln}.$$

Como ya se ha comentado, elegiremos el pivote positivo. Si tomásemos un pivote negativo y el elemento l-ésimo del vector de la derecha b fuera positivo, entonces dicha coordenada en el vector b' sería negativa.

Sin embargo, esta elección no es suficiente para garantizar que todo el vector b' sea no negativo. Para ello necesitamos establecer una regla sobre la elección de l.

$$\text{Notemos que } b'_l = \frac{b_l}{a_{lk}} \text{ pues } b_l \geq 0 \text{ y } a_{lk} > 0.$$

$$\text{Además, si } i \neq l \text{ y } a_{ik} \leq 0, \text{ entonces } b'_i \geq 0.$$

Para que se cumpla que $b'_i \geq 0$ si $i \neq l$ y $a_{ik} > 0$,

tendrá que darse que $b_i - \dfrac{a_{ik}}{a_{lk}} b_l \geq 0.$

Esto es así si y sólo si $\dfrac{b_i}{a_{ik}} \geq \dfrac{b_l}{a_{lk}}$.

$$\text{Por tanto, } l \text{ debe ser tal que } \frac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\}$$

Hasta ahora no hemos dicho nada sobre la elección de la columna k-ésima.
Para ello, estudiemos primero la relación que hay entre los valores de z en x' y en x.

Concretamente, se verifica que

Proposición. $$z(x') = z(\bar{x}) + \frac{b_l}{a_{lk}} \bar{c}_k$$

Se deja al lector la demostración de este resultado

Proposición . Supongamos que seleccionamos k de modo que $\bar{c}_k$ sea negativo.
(a) Si $b_l > 0$, entonces x' mejora el valor de la z en x.
(b) Si $b_l = 0$, el valor de la z no cambia. (de hecho, $x = x'$.)

Nota. En la práctica suele usarse el más pequeño de todos, pero no hay ningún resultado que pruebe que con esa selección se llega antes a la resolución del problema.

RESUMEN MÉTODO DEL SÍMPLEX

para resolver un P.P.L. escrito en forma canónica, esto es,

$$\begin{aligned} \text{Mín } Z(x) &= c^t x \\ \text{s.a.: } Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$A \in M_{m \times n}$, $b \geq 0$

y A contiene una matriz identidad de orden m

1. Escribimos los datos en forma de tabla:

$\bar{x}$	x_1	$\dots$	x_l	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n	
x_1	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$a_{1(m+1)}$	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$a_{l(m+1)}$	$\dots$	a_{lk}	$\dots$	a_{ln}	b_l
$\vdots$		$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$a_{m(m+1)}$	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}	b_m
f. i.	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$\bar{c}_{m+1}$	$\dots$	$\bar{c}_k$	$\dots$	$\bar{c}_n$	$z(\bar{x})$

2. Si la fila indicadora es no negativa, entonces la solución asociada al cuadro es óptima. Dicha solución es $\bar{x} = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$

3. Si no, sea x_k tal que $\bar{c}_k = \min\{\bar{c}_j,\ j = 1, \dots, n\}$ $(c_k < 0)$.

4. Si $a_{ik} \leq 0$, entonces el problema no tiene solución. Es más, $\min z = -\infty$.
(Entiéndase esa expresión en el sentido de que le valor de la z se puede mejorar indefinidamente en puntos del poliedro.)

5. Si no, sea x_l tal que $\dfrac{b_l}{a_{lk}} = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ik}} : a_{ik} > 0\right\}$

6. Finalmente, calculamos un sistema de ecuaciones equivalente al anterior mediante unas operaciones que resumimos en la orden cambio(l,k).

$$e'_l = \frac{e_l}{a_{lk}} \qquad e'_i = e_i - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} e_l \qquad i \neq l$$

Método de las dos fases

Se propone este método cuando no se disponga de una forma canónica del sistema de ecuaciones.

En la fase I se calcula una forma canónica para dicho sistema, si es que existe. El único caso en que esto ocurrirá es aquél en el que poliedro de soluciones factibles es el conjunto vacío. Esta fase I consiste en la resolución, mediante el algoritmo del símplex, de un nuevo problema de programación lineal que sí está escrito en forma canónica. Dicho problema consiste en

$$\begin{aligned} &\min \;\; w(t) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} t_i \\ &\text{s. a.}: \;\; Ax + It = b \\ &\qquad\quad\;\; x, t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $t = (t_1, \ldots, t_m)$ es un vector de nuevas variables que llamaremos artificiales. Se añaden al sistema original de modo que la variable t_i se suma al miembro de la izquierda de la i-ésima ecuación. De este modo, el nuevo sistema de ecuaciones está en forma canónica pues la matriz formada por las columnas de los coeficientes de las variables artificiales es la identidad.