TEMA 3. TEORÍA DE LA DUALIDAD

DEFINICIÓN (PROBLEMA DUAL)

Consideremos el problema de programación lineal:

$$\text{Min } Z(X_1, X_2, X_3) = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

$$\text{s.a} \quad A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 \geq b$$

$$D_1 X_1 + D_2 X_2 + D_3 X_3 \leq d$$

$$E_1 X_1 + E_2 X_2 + E_3 X_3 = e$$

$X_1 \geq 0$, $X_2 \leq 0$, X_3 no restringida en signo

$$x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \; x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \; x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$$

$$b \in \mathbb{R}^{m_1}, \; d \in \mathbb{R}^{m_2}, \; e \in \mathbb{R}^{m_3}.$$

El problema dual de éste es el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Max } \phi(\pi, \mu, \upsilon) = b^t\pi + d^t\mu + e^t\upsilon$$

$$\text{sa} \quad \pi^t A_1 + \mu^t D_1 + \upsilon^t E_1 \leq c_1$$

$$\pi^t A_2 + \mu^t D_2 + \upsilon^t E_2 \geq c_2$$

$$\pi^t A_3 + \mu^t D_3 + \upsilon^t E_3 = c_3$$

$\pi \geq 0$, $\mu \leq 0$, υ no restringida en signo

y el dual de este segundo es el primero.

NOTA Cuando nos refiramos a ellos, hablaremos de un par de problemas PRIMAL-DUAL.

Para trabajar con los problemas duales es preferible recordar el dual de un P.P.L escrito en la siguiente forma. Lo incluyo en forma de definición

DEFINICIÓN (PROBLEMA DUAL) (más sencilla de recordar)

Consideremos el problema de programación lineal

$$(P)\quad \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } \left.\begin{array}{l} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} P \subset \mathbb{R}^n \end{array} \qquad A \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

Llamaremos problema dual de éste al siguiente problema de programación lineal:

$$(D)\quad \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = b^t \pi \\ \text{s.a.: } \left.\begin{array}{l} A^t \pi \leq c \\ \pi \geq 0 \end{array}\right\} P_D \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

Además, el problema dual de este último es el primero considerado.

Min $z(x) = c^t x$ s.a $Ax \geq b$ $x \geq 0$	Max $\phi(\pi) = \pi^t b$ s.a. $\pi^t A \leq c^t$ $\pi \geq 0$

DUALES

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\qquad\qquad$ $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$

La variable x_j está asociada a la restricción $\pi^t A_j \leq c_j$:

$$a_{1j}\pi_1 + a_{2j}\pi_2 + \dots + a_{mj}\pi_m \leq c_j$$

Si llamamos u_j a la variable de holgura asociada a esta restricción, diremos que x_j y u_j están relacionadas.

La variable π_i está asociada a la restricción $\mathring{A}_i x \geq b_i$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

Si llamamos s_i a la variable de holgura asociada a esa restricción, diremos que π_i y s_i están relacionadas

Ejemplo

$$\text{Min } z(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5$$

$$\text{S.a.: } -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \le 5 \quad +S_1 \longrightarrow \pi_1 \le 0$$

$$x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \ge 1 \quad -S_2 \longrightarrow \pi_2 \ge 0$$

$$x_1 + x_4 = 8 \longrightarrow \pi_3$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

Dual

$$\text{Max } \phi(\pi) = 5\pi_1 + \pi_2 + 8\pi_3$$

S.a.

$$(\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ? \ (3 \ \ -2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1)$$

este signo depende de las restricciones de signo de las x's

El dual será:

$$\text{Max } \phi(\pi) = 5\pi_1 + \pi_2 + 8\pi_3$$

S.a.

$$-\pi_1 + \pi_3 \le 3 \quad +u_1$$

$$\pi_1 + \pi_2 \le -2 \quad +u_2$$

$$-\pi_1 + 3\pi_2 \le 1 \quad +u_3$$

$$\pi_1 - 2\pi_2 + \pi_3 \le 0 \quad +u_4$$

$$-\pi_1 + \pi_2 = 1$$

$\pi_1 \le 0$
$\pi_2 \ge 0$

π_3 no restringida en signo

Usando la definición "CORTA" de problema dual, podemos construir el dual de cualquier problema, con un poco de trabajo adicional:

1 Por ejemplo, construyamos el problema dual de un P.P.L. escrito en forma estándar:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min } Z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } Ax = b \\ \quad\quad x \geq 0 \end{array}\right\}$$

El sistema de restricciones se puede reescribir así: $\left\{\begin{array}{l} Ax \geq b \\ -Ax \geq -b \\ x \geq 0 \end{array}\right.$

La matriz de los coeficientes sería $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$.

Atendiendo a la definición, su dual sería:

$$\text{Max } \phi(\pi) = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{s.a.: } \left(A^t \,\vdots\, -A^t\right)\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \leq c \\ \quad\quad \mu, \nu \geq 0 \end{array}\right\} P \subset \mathbb{R}^{2m}$$

Pero P se puede reescribir así: $P = \left\{\begin{array}{l} A^t \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_m \end{pmatrix} \leq c \\ -A^t \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{pmatrix} \leq c \\ \mu, \nu \geq 0 \end{array}\right.$

Hagamos el siguiente cambio de variables:

$$\pi = \mu - \nu$$

Tendríamos el problema equivalente:

$$\text{Max } b^t \pi = \phi'(\pi)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{s.a.: } A^t \pi \leq c \\ \pi \text{ no restringida en signo} \end{array}\right\} P'$$

¿Por qué equivalente? Consideremos la siguiente aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & & \mathcal{P}' \\ (\mu,\nu) & \xrightarrow{\quad g \quad} & \pi = g(\mu,\nu) = \mu - \nu \end{array}$$

g es epiyectiva pero no inyectiva: Infinitos pares (μ,ν) van al mismo π.

Pero, $\phi(\mu,\nu) = \phi'(\pi)$, siendo (μ,ν) cualquiera tal que $g(\mu,\nu) = \pi$.

2 Consideremos el problema (P): $\quad \text{Min } z(x) = c^t x$

$$\text{s.a.:} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

Supongamos que $\bar{A}x = \bar{b}$ es una forma canónica para este problema. Concretamente:

$$\begin{array}{cc|ccc|c} & \bar{x} & x_1 & \cdots & x_n & \\ \hline c_1 & x_1 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \bar{A} & & \bar{b} \\ c_m & x_m & & & & \\ \hline & & & \bar{c} & & z(\bar{x}) \end{array}$$

$\bar{x} = (b_1 \ldots b_m, 0 \ldots 0)$

$c_B = (c_1 \cdots c_B)$, $B^{-1}A = \bar{A}$, $B^{-1}b = \bar{b}$

Sabemos que si x es cualquier solución factible, entonces

$$z(x) = z(\bar{x}) + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c}_j x_j = c_B^t \bar{b} + \bar{c}^t x \qquad (\bar{c}^t = c - c_B^t B^{-1} A)$$

Resolver el problema (P) equivale a resolver este otro:

$$(P') \quad \text{Min } z'(x) = \bar{c}^t x$$

$$\text{s.a.:} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

El dual de (P') es

$$\text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b$$
$$\text{s.a. } \pi^t A \leq \bar{c}^t$$

El dual de (P) es

$$\text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b$$
$$\text{s.a. } \pi^t A \leq c^t$$

¿En qué sentido son equivalentes?

OTRO MAS (el mismo cambiando Min por Max

$$\text{Max } z(x) = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.:}\quad & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \leq 5 \\ & x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \geq 1 \\ & x_1 + x_4 = 8 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

$$\text{Min } \phi(\pi) = 5\pi_1 + \pi_2 + 8\pi_3$$

s.a.

$$(\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ ? \ (3 \ \ -2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1)$$

$(\geq \ \geq \ \geq \ \geq \ =)$.

$$\pi_1 \geq 0$$
$$\pi_2 \leq 0$$

El dual será:

$$\text{Min } \phi(\pi) = 5\pi_1 + \pi_2 + 8\pi_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & -\pi_1 + \pi_3 \geq 3 \\ & \pi_1 + \pi_2 \geq -2 \\ & -\pi_1 + 3\pi_2 \geq 1 \\ & \pi_1 - 2\pi_2 + \pi_3 \geq 0 \\ & -\pi_1 + \pi_2 = 1 \end{aligned}$$

$\pi_1 \geq 0$
$\pi_2 \leq 0$

π_3 no restringida en signo

TEOREMA DÉBIL DE DUALIDAD

Consideremos el par de problemas P-D

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \text{Min} & z(x) = c^t x \\ \text{s.a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \text{Max} & \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a} & \pi^t A \leq c^t \\ & \pi \geq 0 \end{array}$$

Si x es factible en (P) y π es factible en (D) $\Longrightarrow$

$$z(x) \geq \phi(\pi)$$

Sean x y π soluciones factibles primal y dual respectivamente.

Entonces, $\left.\begin{array}{l} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} \pi^t A \leq c^t \\ \pi \geq 0 \end{array}\right\}$

Multipliquemos en $Ax \geq b$ por π^t y en $\pi^t A \leq c^t$ por x:

$\pi^t A x \geq \pi^t b$ y $\pi^t A x \leq c^t x$. Entonces,

$$z(x) = c^t x \geq \pi^t A x \geq \pi^t b = \phi(\pi)$$

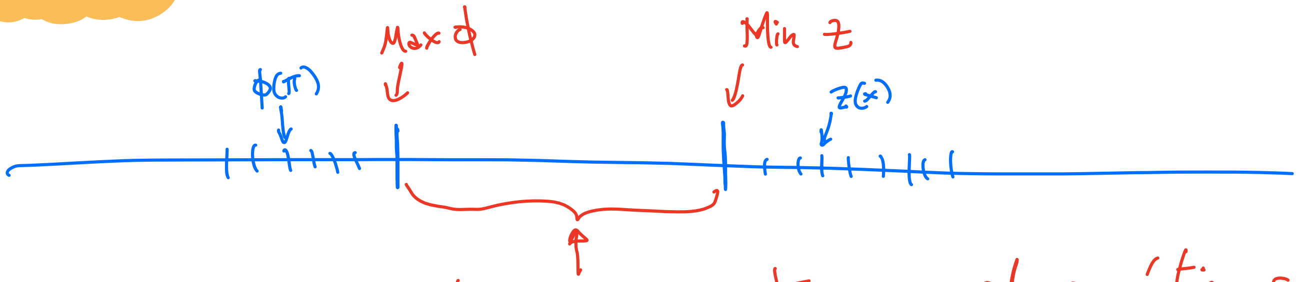
C.Q.D.

NOTA 1 Este teorema es cierto en un enunciado más general. Su demostración es esencialmente la misma:

TEOREMA Dados un par de problemas primal-dual (como los de la primera definición introducida al comienzo del tema), si x y π son soluciones factibles primal y dual, respectivamente, entonces $z(x) \geq \phi(\pi)$

Es decir, siendo ambos factibles, los valores de la función objetivo del problema de tipo minimizar son mayores o iguales que los de la otra

NOTA 2



¿Existe este espacio entre esos valores óptimos?

Veamos que NO.

PROPOSICIÓN Duales de problemas equivalentes son equivalentes

Pensad en la demostración de este resultado.

$$\begin{tikzcd}
(P) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] \arrow[d, dotted, dash] & (D) \arrow[d, dotted, dash, "\text{equiv.?}"] \\
(P') \arrow[r, dash, "\text{dual}"] & (D')
\end{tikzcd}$$

Demostremos el teorema en algunos casos particulares.

1) Si el par P-D es:

$$(P)\quad \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } Ax \geq b \\ \qquad x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \pi^t A \leq c^t \\ \qquad \pi \geq 0 \end{array}$$

(P) es equivalente a (P'):

$$(P')\quad \begin{array}{l} \text{Min } z(x,s) = c^t x \\ \text{s.a.: } Ax - Is = b \\ \qquad x, s \geq 0 \end{array}$$

Su dual sería, por definición:

$$(D')\quad \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \pi^t (A \;\; -I) \leq (c^t, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

Evidentemente, (D) y (D') son iguales.

② Si el par de problemas P-D es:

$$(P)\quad \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = c^t x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a. } \pi^t A \leq c^t \end{array}$$

Supongamos que (P) es factible. Sea x' una solución factible básica y $A'x = b'$ una forma canónica asociada a x'. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x' = (b'_1, \dots, b'_m, 0 - 0)$. Sea $\bar{c}' = c - c_B^t A'$ la fila indicadora correspondiente a esa forma canónica, siendo $c_B^t = (c_1, \dots, c_m)$.

Sabemos que si x es factible $\Rightarrow$ $z(x) = z(x') + \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c}'_j x_j$.

Por tanto, resolver (P) es equivalente a resolver (P'):

(salvo que, en caso de optimalidad, al óptimo de (P') hay que sumarle $z(x')$ para obtener el óptimo de (P))

$$(P')\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z'(x) = \sum_{j=m+1}^{n} \bar{c}'_j x_j = \bar{c}'^t x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{array} \right.$$

El dual de (P') es:

$$\begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \pi^t A' \leq \bar{c}'^t \end{array} \quad (D')$$

Equivalente a

$$\begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a. } \pi^t A'_j \leq \bar{c}'_j, \quad j = 1 - n \end{array}$$

Pero $(A'_1 - A'_m) = I$, $\bar{c}'_j = 0$, $j = 1 - m$ y $\bar{c}'_j = c_j - c_B^t A'_j$, $j = m+1, \dots, n$:

$$(D')\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \pi_i \leq 0, \quad i = 1 - m \\ (\pi^t + c_B^t) A'_j \leq c_j, \quad j = m+1, \dots, n \end{array} \right.$$

Sustituyendo $\pi'_i = \pi_i + c_i$, $i = 1 - m$, quedaría

$$\begin{aligned} &\text{Max } \phi(\pi) = \pi'^t b + c_B^t b \\ &\text{s.a.: } \pi'^t A_j \leq c_j, \quad j = m+1 - n \\ &\qquad \pi_i \leq c_i, \quad i = 1 - m \end{aligned}$$

Dado que $c_B^t b^t = z(x')$ es una constante,

el problema anterior es equivalente a:

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{Max } \phi'(\pi) = \pi'^t b \\ &\text{s.a.: } \pi'^t A_j \leq c_j, \quad j = m+1 \dots n \\ &\qquad \pi_i \leq c_i, \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \right.$$

que es el problema (D).

Como vemos, la constante que habría que sumar a z' es la que misma que habría que sumar a ϕ'.

TEOREMA (FUERTE DE DUALIDAD)

Consideremos un par de problemas primal dual

$$\begin{array}{lll} \text{Min } z(x) = c^t x & \quad y \quad & \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } x \in \mathcal{P} & & \pi \in \mathcal{P}_D \end{array}$$

Si uno de ellos es óptimo, entonces el otro también y

$$\max_{\pi \in \mathcal{P}_D} \phi(\pi) = \min_{x \in \mathcal{P}} z(x)$$

Demostración

Para la demostración supongamos que los problemas son

$$\begin{array}{lll} \text{Mín } z(x) = c^t x & \quad y \text{ su dual} \quad & \text{Máx } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \quad Ax = b & & \text{s.a. } \quad \pi^t A \leq c^t \\ \qquad\qquad x \geq 0 & & \end{array}$$

que $rg(A) = m$ y que el primal es óptimo.

Supongamos que el siguiente es un cuadro óptimo:
(A él llegamos en un número finito de pasos aplicando el método del símplex y las reglas de R. Bland)

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots\ x_n & \\ \hline x_1 & 1 & & & & & & b'_1 \\ x_2 & & \ddots & & & a'_{ij} & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ x_m & & & & 1 & & & b'_m \\ \hline & \bar{c}'_1 & & & & & \bar{c}'_n & z_{opt} = z(x') \end{array}$$

$(A'x = b')$

$x' = (b'_1, \dots, b'_m, 0 \dots 0)$ es óptima

La fila indicadora la podemos escribir así:

$$(\overline{c}')^t = c^t - c_B^t \cdot B^{-1} A \, ,$$ siendo B^{-1} la submatriz de A tal que $\begin{cases} A' = B^{-1} A \\ b' = B^{-1} b \end{cases}$ y $c_B^t = (c_1, c_2, \dots, c_m)$

Como es un cuadro óptimo, $\overline{c}' \geq 0$.

Sea $\pi_B^t = c_B^t \cdot B^{-1}$. $\overline{c}' \geq 0$ implica que $\pi_B^t A \leq c^t$,

es decir, π_B es una solución dual factible.

Además

$$\phi(\pi_B) = \pi_B^t b = c_B^t B^{-1} b = c_B^t b' = z(x') \left(= z_{opt}\right).$$

Dada una solución factible dual cualquiera π,

se tiene que $z(x') \geq \phi(\pi)$

(aplicando el teorema débil a las soluciones factibles x' y π)

Y como $z(x') = \phi(\pi_B)$ tendríamos que $\phi(\pi_B) \geq \phi(\pi)$,

es decir, π_B es óptima dual y

es decir, π_B es óptimo dual y

$$\max_{\pi \in P_D} \phi(\pi) = \phi(\pi_B) = z(x') = \min_{x \in P} z(x).$$

Para la demostración del caso general, usemos la proposición anterior. Consideremos un par de problemas P-D en el que (P) es óptimo. Transformamos (P) en un problema equivalente escrito en forma estándar: (P'). Por la demostración que ya hemos hecho, su dual, (D') también es óptimo y los valores óptimos primal y dual, respectivamente, coinciden. (D) y (D') son equivalentes con lo que termina la demostración.

$$\begin{tikzcd}
(P) \arrow[r, dash, "\text{dual}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{equivalentes}"'] & (D) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{equivalentes}"] \\
(P') \arrow[r, dash, "\text{dual}"] & (D')
\end{tikzcd}$$

COROLARIO En un par de problemas P-D, si ambos son factibles $\Rightarrow$ ambos son óptimos y $z_{opt} = \phi_{opt}$.

Escribid la demostración.

NOTA 1 Dado el problema

$$\begin{aligned} \text{Min } & z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Introducimos variables de holgura "s_i", $i = 1 \dots m$:

$$\begin{aligned} \text{Min } & z(x,s) = c^t x \\ \text{s.a.: } & Ax + Is = b \end{aligned}$$

es un P.P.L equivalente.

$x, s \geq 0$

Supongamos que el siguiente es un cuadro óptimo

	x_1 ... x_n	s_1 ... s_m	
x_B	A'	B^{-1}	b'
	$\bar{c}' \geq 0$	$\bar{c}_s' \geq 0$	$z_{ópt}$.

$$\bar{c}_j' = c_j - c_B B^{-1} A_j$$

$$\bar{c}_{s_i}' = 0 - c_B B^{-1} I_i = -(\pi_B)_i$$

Si el problema fuera de tipo maximizar, la fila indicadora sería ≤ 0 pero $\bar{c}_{s_i}' = -(\pi_B)_i$ también.

NOTA 2 (shadow prices) Dado el problema

$$\text{Min } z(x) = c^t x$$
$$\text{s.a.: } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Supongamos que el siguiente es un cuadro óptimo

	x_1 ... x_n	
x_B	A'	b'

$\bar{c}' \geq 0$ $\qquad\qquad$ z'_{opt}.

Sabemos que $\pi_B = c_B \cdot B^{-1}$ es una solución óptima del dual. Además,
si cambiamos b por $b + \lambda b^*$ y para $\lambda = \lambda_0$
el cuadro anterior sigue siendo óptimo, entonces

$$z_{opt}(\lambda_0) = c_B B^{-1} b + \lambda_0 c_B B^{-1} b^* = \phi_{opt}(\lambda_0)$$

Concretamente, si $b^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ lugar iésimo

$$z_{opt}(\lambda_0) = z'_{opt} + \lambda_0 (\pi_B)_i$$

Por tanto, el cambio por unidad en el valor óptimo de la z nos lo da la coordenada i-ésima de π_B. (esto es el precio oculto para la restricción i-ésima)

TEOREMA DE HOLGURA

TEOREMA Consideremos el par de problemas primal-dual

$$\begin{array}{ll} \text{Min } z(x) = c^t x & \\ \text{s.a.: } Ax \geq b & (P) \\ \qquad x \geq 0 & \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ll} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b & \\ \text{s.a. } \pi^t A \leq c^t & (D) \\ \qquad \pi \geq 0 & \end{array}$$

Denotemos por $s_i = \mathring{A}_i x - b_i$, $i = 1 \dots m$
las variables de holgura en el primal y
por $u_j = c_j - \pi^t A_j$, $j = 1 \dots n$
las del dual

Consideremos dos soluciones $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ factibles primal y dual, respectivamente:

$$\bar{s}_i = \mathring{A}_i\bar{x} - b_i, \quad i=1..m \quad \text{y}$$

$$\bar{u}_j = c_j - \bar{\pi}^t A_j, \quad j=1..n,$$ serán los valores de las variables de holgura en $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$, respect...

El teorema dice que $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ son óptimas $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \bar{s}_i \cdot \bar{\pi}_i = 0, & i=1-m \\ \bar{u}_j \cdot \bar{x}_j = 0, & j=1--n \end{cases}$$

Demostración: Por ser factibles $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$, usando el mismo argumento que en el teorema débil, se tiene que $c^t\bar{x} \underset{1}{\geq} \bar{\pi}^t A\bar{x} \underset{2}{\geq} \bar{\pi}^t b$

A partir de 1: $$\sum_{j=1}^{n}(c_j - \bar{\pi}^t A_j)\bar{x}_j \geq 0$$

A partir de 2: $$\sum_{i=1}^{m}\bar{\pi}_i(\mathring{A}_i\bar{x} - b_i) \geq 0$$

Veyamos ya con la equivalencia descrita en el enunciado:

"$\Longrightarrow$" Supongamos en primer lugar que $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ son óptimas. Usando el teorema fuerte, $z(\bar{x}) = \phi(\bar{\pi})$

Entonces, 1 y 2 se convierten en igualdades

1 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (c_j - \bar{\pi}^t A_j)\bar{x}_j = 0.$

Como todos los sumandos son no negativos $\Rightarrow$

$$\underbrace{(c_j - \bar{\pi}^t A_j)}_{\bar{u}_j}\bar{x}_j = 0, \quad j = 1, \dots n$$

$$\Rightarrow \bar{u}_j \bar{x}_j = 0, \quad j = 1 \dots n$$

2 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \bar{\pi}_i (A_i \bar{x} - b_i) = 0$

Como todos los sumandos son no negativos $\Rightarrow$

$$\bar{\pi}_i \underbrace{(A_i \bar{x} - b_i)}_{\bar{s}_i} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0, \quad i = 1 \dots m$$

$\Leftarrow$ Si $\left.\begin{array}{l} \bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0, \quad i = 1 \dots m \\ \bar{u}_j \cdot \bar{x}_j = 0, \quad j = 1 \dots n \end{array}\right\}$ entonces

1 y 2 son igualdades y, por tanto,

$z(\bar{x}) = \phi(\bar{\pi})$.

Aplicando el teorema débil, $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ son óptimas (escribid con más detalle esto último.)

C.Q.D

<u>NOTA</u> Si $z(\bar{x}) = \phi(\bar{\pi})$ y x factible primal, entonces $z(x) \geq \phi(\bar{\pi})$, por el teorema débil. Por tanto, $z(x) \geq z(\bar{x})$, $\forall x$ factible, i.e., $\bar{x}$ óptima. Para $\bar{\pi}$, el argumento es similar.

<u>COROLARIO</u> En un par de problemas primal dual, supongamos que (P) es factible. Entonces

(P) es no acotado si y sólo si (D) es infactible.

Demostración. Ejercicio al lector

<u>EJERCICIO</u> ¿Puede ocurrir que un P.P.L y su dual sean infactibles?

<u>EJERCICIO</u> A vueltas con el problema

$$\begin{aligned} \text{Min } & z(x) = c^t x \\ \text{s.a } & Ax = b \end{aligned} \quad (P)$$

Su dual es

$$\begin{aligned} \text{Max } & \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a. } & \pi^t A = c^t \end{aligned} \quad (D)$$

1 (P) factible y (D) factible $\Rightarrow$ (P) y (D) óptimos y $z_{opt} = \phi_{opt}$. Sean $\bar{x}$ y $\bar{\pi}$ óptimas primal y dual, respectivamente.

Si x factible $\Rightarrow$ $Ax=b$.

Además, $z(x)=c^t x = \bar{\pi}^t A x = \bar{\pi}^t b = \phi_{opt} = z_{opt}$,

es decir, TODA SOLUCIÓN FACTIBLE ES ÓPTIMA.

2 (P) factible y (D) infactible $\Rightarrow$ (P) no acotado

3 (P) infactible.

MÉTODO DE LAS PENALIZACIONES (REPRISE)

Recordemos que es un método alternativo al método de las dos fases. Para resolver el P.P.L.:

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } \left.\begin{array}{l} Ax=b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} = \mathcal{P} \end{array} \qquad A \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

se propone resolver

$$(P_M) \quad \begin{array}{l} \text{Min } z_M(x,t) = c^t x + M \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \text{s.a.: } \quad Ax + It = b \\ \qquad\quad x, t \geq 0 \end{array}$$

PROPOSICIÓN

1. Si (P_M) es no acotado $\Rightarrow$ (P) también lo es si es factible
2. Si (P_M) óptimo y z_M óptimo no depende de $M \Rightarrow$ (P) también es óptimo. Además, si $(\bar{x},\bar{t})$ es óptimo en (P_M), entonces $\bar{x}$ es óptimo en (P).
3. Si (P_M) óptimo y z_M óptimo depende de $M \Rightarrow$ (P) es infactible, esto es, el poliedro $\mathcal{P}$ es vacío.

Demostración

Quedaba por demostrar la parte 1.

El problema (P) es

$$\text{Min } Z(x) = c^t x$$
$$\text{s.a.: } Ax = b$$
$$x \geq 0$$

y el problema (P_M) es

$$\text{Min } Z_M(x,t) = c^t x + M \sum_{i=1}^{m} t_i$$
$$\text{s.a.: } Ax + It = b$$
$$x, t \geq 0$$

$A \in M_{m \times n}$

El dual de (P) es

$$\text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b$$
$$\text{s.a.: } \pi^t A \leq c$$

y el dual de (PM) es

$$\text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b$$
$$\text{s.a.: } \pi^t A \leq c^t$$
$$\pi_i \leq M, \quad i = 1, 2 \ldots m$$

Estos dos duales son equivalentes (son los mismos).

Si (PM) es no acotado $\Rightarrow$ su dual es infactible y así también, por tanto, el dual de (P) entonces (P) es no acotado si es factible.

C.Q.D.

LEMA DE FARKAS

Uno y sólo uno de los siguientes sistemas de restricciones es factible

(I) $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} \pi^t A \leq 0 \\ \pi^t b > 0 \end{cases}$

Demostración

Tenemos que probar que (I) es factible $\Leftrightarrow$ (II) infactible.

* Veamos primero que si (I) factible $\Rightarrow$ (II) es infactible

Supongamos que (I) es factible y definimos el siguiente par de problemas primal-dual:

$$(P)\ \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = 0^t x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ \quad\quad x \geq 0 \end{array} \quad \xleftrightarrow{\text{dual}} \quad \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \pi^t A \leq 0^t \end{array}\ (D)$$

$0^t = (0, 0, \ldots, 0)$

Por hipótesis, (P) es factible y, puesto que la z es constante, (P) es óptimo. Por el teorema fuerte de dualidad, (D) también lo es y $\phi_{opt} = z_{opt} = 0$.

Si $\pi \in \mathbb{R}^m$ es tal que $\pi^t A \leq 0^t$

entonces $\phi(\pi) = \pi^t b \leq 0$ pues 0 es el máximo.

... $\phi(\pi) = \pi^t b \leq 0$, ...

Entonces (II) es infactible.

* Veamos ahora el recíproco.
Usemos el mismo par de problemas definido más arriba.

$$(P)\ \begin{array}{ll} \text{Min } z(x) = 0^t x \\ \text{s.a. } Ax = b \\ \quad\ x \geq 0 \end{array} \xrightarrow{\text{dual}} \begin{array}{ll} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t b \\ \text{s.a.: } \pi^t A \leq 0^t \end{array}\ (D)$$

El dual es factible pues $0^t A \leq 0$ (esto es, el 0 es es una solución factible del dual).

Si (II) es infactible, entonces si $\pi^t A \leq 0 \Rightarrow \pi^t b \not> 0$

Es decir, si π es factible dual $\Rightarrow$ $\phi(\pi) \leq 0$.

Como el dual es un problema de tipo maximizar, entonces es óptimo. El teorema fuerte asegura que el primal también es óptimo y que $z_{opt} = \phi_{opt}$.

En particular, (P) es factible, esto es, (I) es factible.

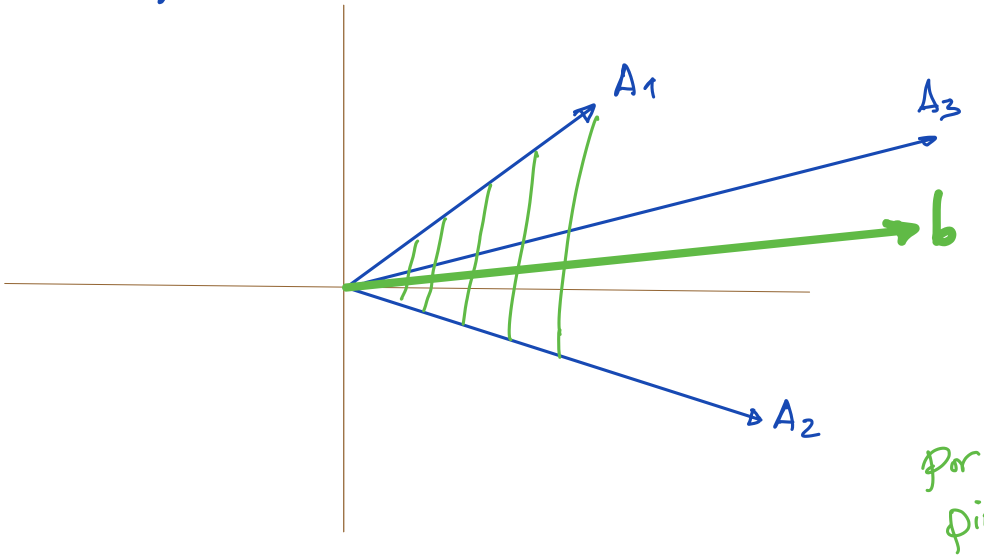
CQD.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

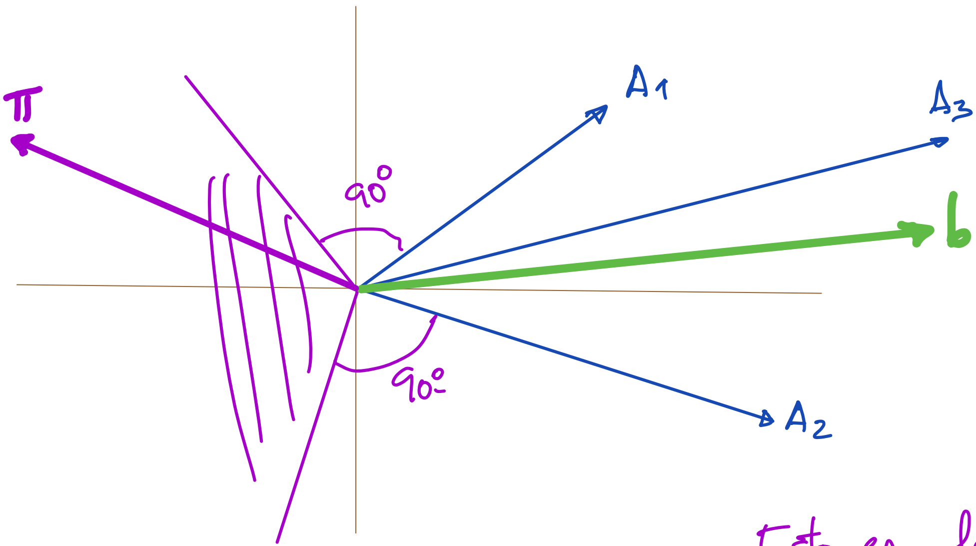
$$(I) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (II) \begin{cases} \pi^t A \leq 0 \\ \pi^t b > 0 \end{cases}$$

Recordemos que $Ax = b$ lo podemos escribir así:

$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = b$, donde A_j, $j = 1 \ldots n$, es es j-ésimo vector columna de A. Que (I) sea factible significa que b es combinación lineal no negativa de los ... columnas de A. Supongamos que $A_j \in \mathbb{R}^2$ y que vectores columna de A. Supongamos que $m=2$ y que $n=3$. Más concretamente:



(I) es factible si y sólo si b cae en la región determinada entre los vectores A_1 y A_2, por ejemplo, el que he pintado



Por otra parte, si (II) es factible $\pi^t A_j \leq 0$, $j=1,2,3$, esto es, π y A_j forman un ángulo mayor que $90°$.

Esto es, las soluciones de (II), si existen, deben estar en la zona violeta

Pero también ha de verificarse que $\pi^t \cdot b > 0$, esto es, los vectores de la zona violeta deben formar un ángulo agudo con el vector b y ya vemos en el dibujo que eso es imposible

Estudiemos un resultado similar al lema de Farkas

PROPOSICIÓN Una y sólo una de las siguientes afirmaciones es cierta:

1. El sistema de restricciones (I) $\begin{cases} Ax=0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ tiene una solución no nula
2. El sistema (II) $\pi^t A < 0$ es factible

Demostración

Probemos "1. es falsa $\Leftrightarrow$ "2. es cierta"

"$\Rightarrow$" Supongamos que la única solución de (I) es $x=0$. Tomemos $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c_j < 0$, $j=1 \dots n$ y consideremos el siguiente par de problemas primal-dual.

$$(P) \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } Ax = 0 \\ \quad x \geq 0 \end{array} \xleftrightarrow{\text{dual}} (D) \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t 0 \\ \text{s.a.: } \pi^t A \leq c \end{array}$$

Por hipótesis, sea quien sea c, (P) es óptimo $\Rightarrow$ (D) también lo es. En particular, (D) es factible y, π es dual factible $\Rightarrow \pi^t A \leq c < 0 \Rightarrow$ (II) es factible.

"$\Leftarrow$" Para el recíproco, tenemos que afinar en la elección de c. Partimos de que (II) es factible. Sea $\bar{\pi} \,/\, \bar{\pi}^t A < 0$. Sea $a = \max\{\bar{\pi}^t A_j,\ j=1 \dots n\}$. a es negativo. Sea $c = (a, a, \dots, a)$. Consideremos el par de problemas primal-dual siguiente

$$(P) \begin{array}{l} \text{Min } z(x) = c^t x \\ \text{s.a.: } Ax = 0 \\ \quad x \geq 0 \end{array} \xleftrightarrow{\text{dual}} (D) \begin{array}{l} \text{Max } \phi(\pi) = \pi^t 0 \\ \text{s.a.: } \pi^t A \leq c \end{array}$$

El dual es factible ($\bar{\pi}$ es factible) y, como $\phi = cte$, es óptimo $\Rightarrow$ (P) óptimo. Si existiera $x \neq 0$ factible en (P) $\Rightarrow z(x) < 0$ pues $c < 0$ y $x \geq 0, x \neq 0$. Por tanto,

$Z_{opt} < 0$ pero $\phi_{opt} = 0$: Absurdo $\Rightarrow$ "1." no es cierto.

EJERCICIO Consideremos el P.P.L

$$\begin{aligned} \text{Mín } & z(x,y) = c^t x - b^t y \\ \text{s.a.: } & Ax \geq b \\ & -A^t y \geq -c \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

Probad que o bien es infactible o bien es óptimo siendo $Z_{opt} = 0$.

Escribamos el dual

$$\begin{aligned} \text{Máx } & \phi(\pi,\mu) = \pi^t b - \mu^t c \\ \text{s.a.: } & \pi^t A \leq c^t \\ & -\mu^t A^t \leq -b^t \\ & \pi \geq 0,\ \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Lo podemos reescribir así:

$$\begin{aligned} \text{Mín } & \phi(\pi,\mu) = c^t \mu - b^t \pi \\ \text{s.a.: } & A\mu \geq b \\ & -A^t \pi \geq -c \\ & \pi \geq 0,\ \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Es decir, el problema inicial es dual de sí mismo.

$((P) \equiv (D))$.

Por tanto, ambos problemas son óptimos si son factibles y el valor óptimo es 0.

ACLARACIÓN sobre esto último.

(P)
$$\begin{aligned} \text{Mín } & z(x) = -b^t x \\ \text{s.a. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

y su dual

(D)
$$\begin{aligned} \text{Max } & \phi(\pi) = b^t \pi \\ \text{s.a. } & A^t \pi \leq -b^t \\ & \pi \geq 0 \end{aligned}$$

$|||$

$$\begin{aligned} \text{Mín } & \phi'(\pi) = -b^t \pi \\ \text{s.a.: } & -A^t \pi \geq b^t \\ & \pi \geq 0 \end{aligned}$$

coinciden si $-A^t = A$.

Puede ocurrir que ...

(a) ... ambos sean infactibles

(b) ... ambos sean factibles. Si x es factible en (P) $\Rightarrow \pi = x$ es factible en (D).

Entonces, $z(x) \geq \phi(\pi) = -z(x)$ (teorema débil). Por tanto, $2z(x) \geq 0$, es decir,

$z(x) \geq 0$. Ambos problemas serán óptimos y $Z_{opt} = 0$.

OTRO Dados los problemas (que supondremos factibles)

$$\begin{array}{ll} \min & z(x) = c^t x \\ sa.: & Ax \geq b \end{array} \quad (P1) \quad \text{y} \quad \begin{array}{ll} \max & z(y) = c^t y \\ sa.: & Ay \leq b \end{array} \quad (P2)$$

, probad que

(a) Si uno es óptimo, entonces el otro también.

(b) Si son óptimos y x e y son soluciones factibles de (P1) y (P2), respectivamente, entonces $z(x) \geq z(y)$.

(a) Escribamos los duales...

$$(D1) \quad \begin{array}{ll} max & \phi(\pi) = \pi^t b \\ s.a.: & \pi^t A = c^t \\ & \pi \geq 0 \end{array} \qquad (D2) \quad \begin{array}{ll} min & \phi(\pi) = \pi^t b \\ s.a.: & \pi^t A = c^t \\ & \pi \geq 0 \end{array}$$

(P1) óptimo $\Rightarrow$ (D1) óptimo $\Rightarrow$ (D2) factible $\Rightarrow$

Teorema fuerte

$\Rightarrow$ (P2) óptimo pues es factible.

(Razonaríamos de igual manera si suponemos (P2) óptimo)

(b) Probemos que si $\bar{x}$ óptima en (P1) e $\bar{y}$ óptima en (P2), entonces $z(\bar{x}) \geq z(\bar{y})$

Si $\bar{x}$ óptima en (P1), entonces existe $\bar{\pi}$ óptima en (D1) tal que $z(\bar{x}) = \phi(\bar{\pi}) = \bar{\pi}^t b$

Si $\bar{y}$ óptima en (P2), entonces existe $\hat{\pi}$ óptima en (D2) tal que $z(\bar{y}) = \phi(\hat{\pi}) = \hat{\pi}^t b$.

Dado que en los duales, las soluciones factibles son las mismas y en el (D1) se maximiza la misma función que en (D2) se minimiza, entonces

$\phi(\bar{\pi}) \geq \phi(\hat{\pi})$, i.e.: $z(\bar{x}) \geq z(\bar{y})$.

Claro está que si x e y son factibles de (P1) y (P2), respectivamente, entonces

$$z(x) \geq z(\bar{x}) \geq z(\bar{y}) \geq z(y)$$

OTRO Consideremos el P.P.L.

$$\text{Min } z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.a.} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

$$0 \leq x_j \leq b_j, \ j = 1 \dots n, \quad (b_j > 0)$$

(a) Escribid el dual

(b) Si $\bar{x}$ es óptima, probad que existe un nº real $\bar{\pi}$ tal que ...

π tal que:

$$\pi a_j < c_j \Rightarrow \bar{x}_j = 0$$
$$\pi a_j > c_j \Rightarrow \bar{x}_j = b_j$$
$$0 < \bar{x}_j < b_j \Rightarrow \pi a_j = c_j$$

(a) Para calcular el dual, escribimos el problema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ \leq \\ \vdots \\ \leq \end{matrix} \begin{pmatrix} b \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Llamemos π a la variable dual asociada a la primera restricción (igualdad) y μ_j a la restricción $x_j \leq b_j$, $j=1\dots n$

El dual sería:

$$\text{Max } \phi(\pi, \mu) = \pi \cdot b + \sum_{j=1}^{n} b_j \mu_j$$
$$\text{s.a: } \pi a_j + \mu_j \leq c_j \quad j=1\dots n$$
$$\mu_j \leq 0, \; j=1\dots n$$

(b) Si $\bar{x}$ es óptima $\Rightarrow$ el dual es óptimo y, por tanto, existe $(\bar{\pi}, \bar{\mu})$ óptima dual.

Denotemos por s_j la variable de holgura en $x_j \leq b_j$, $j=1,\dots,n$ y por u_j la variable de holgura dual en $\pi a_j + \mu_j \leq c_j$, $j=1\dots n$.

Aplicando el teorema de holgura,

$$\bar{x}_j \cdot \bar{u}_j = 0, \; j=1\dots n, \quad \bar{s}_j \cdot \bar{\mu}_j = 0, \; j=1\dots n$$

Así, si $j \in \{1,\dots,n\}$ es tal que ...

(1) ... $\pi a_j < c_j \Rightarrow \bar{u}_j > 0$ pues $\bar{\mu}_j \leq 0 \Rightarrow \bar{x}_j = 0$

(2) ... $\pi a_j > c_j \Rightarrow \bar{\mu}_j < 0 \Rightarrow \bar{s}_j = 0 \Rightarrow \bar{x}_j = b_j$

(3) ... $0 < \bar{x}_j < b_j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{s}_j > 0 \Rightarrow \bar{\mu}_j = 0 \\ \bar{u}_j = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \pi a_j = c_j$

OTRO

(1) Enuncia el teorema de holgura para el siguiente problema de programación lineal.

$$(P)\quad \begin{array}{lll|l} \text{Min} & z(x) = c^t x & & \\ \text{sa} & Ax \geq b & & A \in \mathcal{M}_{mxn} \\ & x_j \leq 1, & j = 1, \dots p,\ p < n & \text{rang}(A) = m \\ & x_j \geq 0, & j = 2, \dots n & \end{array}$$

(2) Sea x' una solución factible. Probar que x' es óptima si y sólo si existe un vector π' en $\mathcal{R}^m$ tal que se verifican las siguientes afirmaciones:

a) Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\pi'_i > 0$ se tiene que $\AA_i x' = b_i$

b) Para cada $j \in \{2, \dots, n\}$ tal que $\bar{c}_j > 0$ se tiene que $x'_j = 0$

c) Para cada $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $\bar{c}_j < 0$ se tiene que $x'_j = 1$

donde $\bar{c}_j = c_j - \pi'^t A_j$

(1) Escribamos el dual: llamemos $\pi_1 \dots \pi_m$ a las variables duales que provienen de $Ax \geq b$ y, $\mu_1 \dots \mu_p$, a las que provienen de $x_j \leq 1$, $j = 1 \dots p$.

llamemos $s_1 \dots s_m$ a las variables de holgura en $Ax \geq b$ y $s_{m+1}, \dots, s_{m+p}$, a las de $x_j \leq 1$, $j = 1 \dots p$.

El sistema de restricciones podríamos reescribirlo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1p} & & a_{1n}\\ & & & & \\ a_{m1} & & a_{mp} & & a_{mn}\\ 1 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \\ x_n\end{pmatrix} \begin{matrix}\geq\\ \vdots\\ \geq\\ \leq\\ \vdots\\ \leq\end{matrix} \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

Así las cosas, el dual del problema considerado es

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \vdots\\ \pi_m\end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_p\end{pmatrix}$$

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \text{Max } \phi(\pi,\mu) = \pi^t b + \sum_{j=1}^{p} \mu_j & \\ \text{s.a.:} & \\ \quad \pi^t A_1 + \mu_1 = c_1 & \\ \quad \pi^t A_j + \mu_j \leq c_j & , j = 2,\dots,p \\ \quad \pi^t A_j \leq c_j & , j = p+1,\dots,n \\ \quad \pi \geq 0,\ \mu \leq 0 & \end{array}$$

Sean $u_j = c_j - (\pi^t A_j - \mu_j)$, $j = 2,\dots,p$ y

$u_j = c_j - \pi^t A_j$, $j = p+1,\dots,n$, las variables de holgura duales.

El teorema de holgura aplicado a este par de problemas dice que $\bar{x}$ factible en (P) y $(\bar{\pi},\bar{\mu})$ en (D), son óptimas sii

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{x}_j \bar{u}_j = 0 & \text{si} & j = 2, \dots, n \\ \bar{\pi}_i \cdot \bar{s}_i = 0 & \text{si} & i = 1, \dots, m \\ \bar{\mu}_i \cdot \bar{s}_{m+i} = 0 & \text{si} & i = 1, \dots, p \end{array}\right\}$$

(2) Sea x' factible en (P) y supongamos que es óptima.

Consideremos un cuadro óptimo para x'

$$\begin{array}{c|cccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & s_1 & \cdots & s_m & s_{m+1} \cdots s_{m+p} & \\
\hline
x_{l_1} & & & & & & & & & b'_1 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & b'_m \\
 & & & & & & & & & b'_{m+1} \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
x_{l_{m+p}} & & & & & & & & & b'_{m+p} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min } z(x) = c^t x & \\ \text{S.a.}: \left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \mathcal{P} & \end{array}$$

no acotado. Entonces

$\exists v \,/\, Av = 0$, $v \geq 0$. Además, si $\bar{x}$ es factible básica (y $x_1, \dots, x_m$ son sus variables básicas en la forma canónica asociada $\bar{A}x = \bar{b}$), se tiene que

$$\bar{x} + \lambda v \subseteq \mathcal{P} \quad \text{si } \lambda \geq 0$$

Podemos suponer que v es una SHE y $\bar{x} + \lambda v$ es un lado de $\mathcal{P}$.

Que $\bar{x} + \lambda v$ sea un lado de $\mathcal{P}$ equivale a que el rango del sistema de vectores formado por aquellos A_j tales que $\bar{x}_j > 0$ o $v_j > 0$ es su cardinal menos 1.

Esto es, en la forma canónica $\bar{A}x = \bar{b}$ existe una única variable no básica, digamos x_k, tal que $v_k > 0$.

$$\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & \\
\hline
x_1 & & & & & & \bar{a}_{1k} & & & \bar{b}_1 \\
\vdots & & & & & & & & & \\
x_m & & & & & & \bar{a}_{mk} & & & \bar{b}_m \\
\hline
\end{array}$$

Las soluciones del sistema $Ax=b$ cuyas coordenadas $x_{m+1}, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ son 0 forman la recta

$$x_1(\lambda) = \bar{x} + \lambda w, \text{ siendo } w = (-\bar{a}_{1k}, \ldots, -\bar{a}_{mk}, 0, \ldots 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots, 0)$$

Por tanto, $w = v$

APLICACIÓN DEL LEMA DE FARKAS (fuera de concurso)

Supongamos que el lema de Farkás es cierto pero que desconocemos los teoremas de dualidad (El lema se puede probar por otros medios).

Teorema Consideremos un P.P.L. en forma estándar

$$\min\ z(x) = c^t x \quad \text{s.a. } Ax = b,\ x \geq 0 \qquad (P)$$

y su dual

$$\max\ \phi(\pi) = \pi^t b \quad \text{s.a. } \pi^t A \leq c \qquad (D)$$

(D) es óptimo si y sólo si existen $\bar{x}$ factible en (P) y $\bar{\pi}$ factible en (P) tales que $\phi(\bar{\pi}) = z(\bar{x})$.

Demostración

"$\Leftarrow$"

Supongamos primero que $\exists\ \bar{x}$ y $\bar{\pi}$ / $\phi(\bar{\pi}) = z(\bar{x})$.

Veamos que $\bar{\pi}$ es óptima en (D)

Veamos que $\bar{\pi}$ es óptima en (D)

Sea π cualquier solución factible en (D).

$$\phi(\pi) - \phi(\bar{\pi}) = \pi^t b - \bar{\pi}^t b = \pi^t A\bar{x} - c^t\bar{x} =$$

$$= \underbrace{(\pi^t A - c^t)}_{\leq 0 \ (\pi \text{ factible})} \underset{\geq 0 \ (\bar{x} \text{ factible})}{\bar{x}} \leq 0$$

$\Rightarrow \phi(\bar{\pi}) \geq \phi(\pi), \ \forall \pi$ factible, esto es, $\bar{\pi}$ óptima

"$\Rightarrow$" Supongamos ahora que (D) es óptimo.

Así, existe $\bar{\pi}$ factible en (D) que es óptima.

Sea $I = \{j : \bar{\pi}^t A_j = c_i\}$

Se pueden dar dos casos:

<u>CASO 1</u>: $I = \emptyset$

En este caso, $\bar{\pi}^t A_j < c_i$, $j = 1 \dots n$.

Sea $\delta > 0$ / $\bar{\pi}^t A - c^t < -\delta e < 0$, siendo $e = (1 \dots 1) \in \mathbb{R}^n$

Además, para cada $\pi \in \mathbb{R}^m$ $\exists\, \alpha_\pi > 0$ / $\alpha_\pi \pi^t A \leq \delta e$

(No necesariamente factible dual).

Así pues, $(\bar{\pi} + \alpha_\pi \pi^t) A < c^t - \delta e + \alpha_\pi \pi^t A \leq c^t$

es decir, $(\bar{\pi} + \alpha_\pi \pi^t)$ es factible en (D).

Como $\bar{\pi}$ es óptima, $\phi(\bar{\pi} + \alpha_\pi \pi^t) \leq \phi(\bar{\pi})$.

Entonces, $\pi^t b \leq 0$, $\forall \pi \in \mathbb{R}^m$ pues $\alpha_\pi > 0$.

Pero esto implica que $b = 0$ y, por tanto,

$\bar{x} = 0$ es factible en (P) y $\phi(\bar{\pi}) = z(\bar{x}) (= 0)$

<u>CASO 2</u>: $I \neq \emptyset$

el sistema $\pi^t A_j \leq 0$, $j \in I$ no tiene

un

$\pi \quad >$

Si la tuviera, digamos $\hat{\pi}$, $\alpha\hat{\pi}$ también lo sería, luego y tomando α suficientemente pequeño, tendríamos que $\bar{\pi}+\alpha\hat{\pi}$ sería factible en (D) pues

si $j\in I \Rightarrow (\bar{\pi}+\alpha\hat{\pi})^t A_j = \bar{\pi}^t A_j + \alpha\hat{\pi}^t A_j \le c_j + 0 = c_j$

y si $j\notin I \Rightarrow \bar{\pi}^t A_j - c_j < -\delta c < 0$ para un cierto $\delta>0$

Además, para ese δ, existe $\alpha>0$ tal que

$$\alpha\hat{\pi}^t A_j \le \delta e$$

Así $(\bar{\pi}+\alpha\hat{\pi})^t A_j = \bar{\pi}^t A_j + \alpha\hat{\pi}^t A_j \le c_j - \delta e + \alpha\hat{\pi}^t A_j \le c_j$

Entonces $\phi(\bar{\pi}+\alpha\hat{\pi}) \le \phi(\bar{\pi})$ pues $\bar{\pi}$ es óptima.

Esto implica que $\alpha\hat{\pi}^t b \le 0$ y a su vez que $\hat{\pi}^t b \le 0$.

Por tanto, el sistema $\left.\begin{array}{l} \pi^t A_j \le 0,\ j\in I \\ \pi^t b > 0 \end{array}\right\}$ no tiene solución

Aplicando el lema de Farkas,

el sistema $\left.\begin{array}{l} \sum_{j\in I} x_j A_j = b \\ x_j \ge 0,\ j\in I \end{array}\right\}$ tiene solución.

Sea $(\tilde{x}_j)_{j\in I}$ una de sus soluciones y definimos

$\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ / $\bar{x}_j = \begin{cases} \tilde{x}_j & \text{si } j\in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$\bar{x}$ es factible en (P) y

$$z(\bar{x}) = \sum_{\in} c_j \bar{x}_j = \sum_{\in I} \bar{\pi}^t A_j \bar{x}_j = \bar{\pi}^t \sum_{j\in I} A_j \bar{x}_j = \bar{\pi}^t b = \phi(\bar{\pi}).$$