Introducción a la Programación Lineal

1. Dada la siguiente tabla correspondiente a cierta iteración del método del símplex

	c_j	14	25	18	0	0	0	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\mathbf{x}_B$
		$5/2$	0	$3/4$	1	$-1/4$	0	200
		$1/2$	1	$1/4$	0	$1/4$	0	100
		0	0	$-3/2$	0	$-1/2$	1	40

Se pide:

a) Escribir las ecuaciones transformadas correspondientes a esta tabla.

b) ¿Cuáles son las variables básicas?

c) Completar la tabla.

d) Justificar si la tabla obtenida en c) es óptima. En caso negativo, ¿qué variable debe entrar en la base y cuál debe salir?

e) Obtener la tabla final.

2. Las tablas que se presentan a continuación corresponden a alguna iteración del método del símplex en problemas de minimización. Seleccione de entre las condiciones que siguen aquellas que se adapten a cada problema y responda la cuestión correspondiente.

• En las tablas, $c_j = M$ implica que X_j es una VARIABLE ARTIFICIAL

a) Tiene solución óptima única.

b) Tiene soluciones óptimas alternativas. ¿Cómo se obtienen?

c) La solución es degenerada. ¿Por qué?

d) El problema es no acotado. ¿Por qué?

e) Existe un rayo óptimo. ¿Por qué? (existe una semirrecta de soluciones óptimas)

f) El problema es infactible.

g) Es posible la mejora en el objetivo. ¿Cuál es el pivote?

TABLA 1

	c_j	-6	-8	0	0	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{x}_B$
0	x_3	$15/4$	0	1	-1	10
-8	x_2	$1/4$	1	0	$1/4$	10
	$\bar{c}_j$	-4	0	0	2	80

TABLA 2

	c_j	1	1	0	0	M	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{x}_B$
1	x_1	1	1	1	0	0	1
M	x_5	0	-2	-4	-1	1	2
	$\bar{c}_j$	0	0	-1	0	0	-1
	$\times M$	0	2	4	1	0	-2

TABLA 3

	c_j	-1	3	0	M	0	M	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\mathbf{x}_B$
0	x_5	0	3	-4	4	1	-1	4
-1	x_1	1	1	-1	1	0	0	3
	$\bar{c}_j$	0	4	-1	1	0	0	3
	$\times M$	0	0	0	1	0	1	0

TABLA 4

	c_j	-6	-10	0	0	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{x}_B$
0	x_3	$19/5$	0	1	$-2/5$	4
-10	x_2	$3/5$	1	0	$1/5$	3
	$\bar{c}_j$	0	0	0	2	30

TABLA 5

	c_j	-15	6	0	0	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{x}_B$
-15	x_1	1	0	$-2/3$	$1/3$	$10/3$
6	x_2	0	1	$-5/3$	$1/3$	$4/3$
	$\bar{c}_j$	0	0	0	3	42

TABLA 6

	c_j	-3	-2	0	0	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_1	x_2	x_3	x_4	$\mathbf{x}_B$
-2	x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
-3	x_1	1	0	$-1/4$	$3/4$	3
	$\bar{c}_j$	0	0	$1/4$	$5/4$	13

3. La siguiente tabla corresponde a un problema de programación lineal de minimmización en el que no ha sido necesario añadir variables artificiales para su resolución

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\mathbf{x}_B$
x_3	7	a_1	1	0	a_2	0	b
x_4	-3	-4	0	1	-2	0	3
x_6	a_3	-2	0	0	6	1	5
$\bar{c}_j$	$-c_1$	$-c_2$	0	0	9	0	16

Determinar las restricciones sobre los valores desconocidos $a_1, a_2, a_3, b, c_1, c_2$ *para que se cumplan las siguientes condiciones:*

a) La solución proporcionada por la tabla actual corresponde a un óptimo único.

b) Ídem. pero con óptimos alternativos.

c) La solución proporcionada por la tabla actual es solución factible degenerada.

d) La solución proporcionada por la tabla actual es solución factible, pero el problema es no acotado.

e) La solución proporcionada por la tabla actual es solución factible, pero puede mejorarse, o al menos no empeora el valor del objetivo sustituyendo x_6 *por* x_1, *obteniendo otra solución básica factible.*

f) Existe rayo óptimo.

4. Probar que si una variable básica sale en una iteración del método del símplex, no puede entrar en la iteración siguiente, salvo en el caso de óptimos alternativos.

5. Resolver por el método del símplex los programas lineales

a) $$\begin{aligned} \text{máx } z = \ & x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ & 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \text{mín } z = \ & 2x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + 4x_2 \le 8 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \text{mín } z = \ & x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + 2x_2 \ge 0 \\ & x_1 - x_2 \ge 0 \\ & x_1 \ge 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \text{máx } z = \ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + 4x_2 \le 15 \\ & 3x_1 + x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & 3x_1 - x_2 \le 11 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \text{máx } z = \ & 3x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + 3x_2 \le 5 \\ & x_1 + x_2 = 7 \\ & 5x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} \text{máx } z = \ & -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 = 12 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} \text{máx } z = \ & x_1 + x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_2 \ge 2 \\ & x_1 \ge 1 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} \text{mín } z = \ & x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a} \ & \\ & x_1 + x_2 \ge 2 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6. Demostrar quela tabla siguiente no puede formar parte de ningún ciclo.

	c_j	c_{m+1}	c_{m+2}	$\cdots$	c_n	
$\mathbf{c}_B$	VB	x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n	$\mathbf{x}_B$
c_1	x_1					0
c_2	x_2					$b_2 > 0$
$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
c_n	x_n					$b_n > 0$
	z	$\bar{c}_{m+1}$	$\bar{c}_{m+2}$	$\cdots$	$\bar{c}_n$	

7. Una planta química fabrica dos productos A, B mediante dos procesos I y II. La tabla da los tiempos de producción de A y B en cada proceso y los beneficios (en euros) por unidad vendida

	Producto	
Proceso	A	B
I	2	3
II	3	4
Beneficio/u	40	100

Se dispone de 16 horas de operación del proceso I y de 24 horas del proceso II. La producción de B da, además, un subproducto C (sin coste adicional) que puede venderse a 30 euros/u. Sin embargo, el sobrante de C debe destruirse con coste 20 euros/u. Se obtienen 2 unidades de C por cada unidad de B producida. La demanda de C se estima en, a lo sumo, 5 unidades.

Formular un programa lineal que dé el plan de producción con máximo beneficio. Resolver mediante el método del simplex.

8. Probar que los elementos de la fila indicadora de una tabla del simplex pueden calcularse a partir del cuadro anterior aplicando la regla del rectángulo.

9.

$$\begin{array}{rl} \text{máx } z = & x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a} & \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

   a) Resolver mediante el método del simplex revisado.

   b) Seguir las iteraciones sobre la representación gráfica de la región factible en el plano x_1x_2, mostrando los puntos extremos que recorre el método.

10. Resolver el siguiente problema de optimización transformándolo previamente en un programa lineal

$$\begin{array}{rl} \text{mín } z = & |x_1 + x_2 - 7| + |-x_1 + x_3 + 6| + |x_1 - 2x_2 + x_3| + |-x_2 + x_3 - 10| \\ \text{s. a} & \\ & 2x_1 - x_3 \geq 0 \\ & 4x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

11. Utilizar el método del símplex para verificar que el programa lineal

$$\begin{array}{rl} \text{máx } z = & x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a} & \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

es no acotado. A partir de la tabla final, encontrar una solución cuyo valor sea mayor que 2000.

12. Consideremos los PPL

$$a)\quad \begin{array}{rl} \text{mín } z(x) = & c^t x \\ \text{s. a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{rl} \text{mín } z'(x) = & (\mu c)^t x \\ \text{s. a} & \\ & Ax = \lambda b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde λ y μ son valores reales estrictamente positivos. Obtener la relación entre las soluciones óptimas de ambos problemas, suponiendo que el óptimo existe.

13. Se ha encargado a un laboratorio médico que determine si existe una relación significativa en una marca de tabaco entre el porcentaje de nicotina (Y) y los porcentajes de nitrógeno (X_1), benzopireno (X_2), alcaloides (X_3), ácido málico (X_4), ácido cítrico (X_5) y alquitrán (X_6). Se han tomado diez muestras del tabaco y se han medido los niveles porcentuales de las sustancias aludidas. La tabla muestra tales medidas porcentuales

Muestra	*Nicot.* Y	*Nitróg.* X_1	*Benzop.* X_2	*Alcaloi.* X_3	*A. málico* X_4	*A. cítrico* X_5	*Alquit.* X_6
1	1.68	3.02	3.16	1.29	0.12	3.73	2.07
2	2.85	2.08	3.14	2.60	0.50	2.32	1.80
3	2.10	1.89	2.82	2.04	0.23	3.56	3.02
4	7.06	1.94	3.54	3.11	0.26	3.76	3.07
5	1.42	2.15	2.28	1.06	0.68	2.18	1.31
6	2.66	3.53	1.74	2.64	0.50	3.48	2.23
7	1.39	2.11	2.33	3.05	0.39	3.19	1.31
8	2.64	1.62	2.78	1.72	0.50	1.17	1.25
9	2.82	2.20	1.16	2.06	0.42	3.79	2.15
10	3.30	1.97	3.58	3.07	0.54	2.70	1.29

a) Ajustar un modelo de regresión lineal múltiple a los datos anteriores utilizando programación lineal y considerando como función objetivo la minimización de la suma de desviaciones absolutas.

b) Realizar lo mismo que en el apartado anterior, pero considerando como objetivo la minimización de la máxima desviación absoluta.

c) Comparar los resultados con los que se obtienen con el método de mínimos cuadrados.

14. Utilizando la programación lineal probar que

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 8$$

15. La realización de una batería de 10 tests de esfuerzo-tensión a un individuo ha proporcionado los siguientes datos

Test	*Esfuerzo* Y	*Tensión* X
1	91	0.001
2	97	0.002
3	108	0.003
4	111	0.005
5	114	0.006
6	110	0.006
7	112	0.009
8	105	0.011
9	98	0.016
10	91	0.017

Se desea ajustar un polinomio a este conjunto de datos. El diagrama de dispersión sugiere que una parábola podría resultar adecuada. Determinar el "mejor" ajuste parabólico tomando como objetivo la minimización de la suma de desviaciones absolutas entre los valores observados y las predicciones. Compararlo con el correspondiente ajuste de mínimos cuadrados.