

1. [2.5 puntos] Resuelve los siguientes problemas de programación lineal. Si hay más de una solución óptima, calcúlalas todas.

a)
$$\begin{aligned} \min \quad & 14x_1 + 7x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 18 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min \quad & 6x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 18 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. [2.5 puntos] Consideremos un problema de programación lineal escrito en forma estándar tal que $b \geq 0$ y $c \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = c^t x, \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \quad \text{siendo } A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que $\bar{x} = (1, 0, 1, 0, 1)$ es una solución factible básica tal que $z(\bar{x}) = 0$.

Escribe el dual y demuestra que es óptimo. Escribe una solución óptima dual. ¿Es $x = 0$ óptima del primal?

3. [2.5 puntos] Demuestra que uno y sólo uno de los siguientes sistemas de restricciones es factible.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 &< 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\pi_1 + a_{21}\pi_2 &= c_1 \\ a_{12}\pi_1 + a_{22}\pi_2 &= c_2 \\ \pi_1 &\geq 0 \\ \pi_2 &\leq 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

4. [2.5 puntos]

Una reconocida marca de vinos tiene 4 bodegas repartidas por todo el país. Desde ahí envían sus botellas a 3 mercados. En la tabla se pueden leer los costes de transporte (por botella) desde las bodegas hasta los mercados.

La capacidad de producción de botellas de vino en cada una de las bodegas es distinta. En esa misma tabla podemos leer los datos. También podemos leer en ella las demandas semanales de cada uno de los mercados.

El precio de manipulación del vino y los ingresos por la venta de las botellas no es objeto de este problema. Solo se trata de gastos de transporte.

Bodegas	Mercados			Capacidad
	1	2	3	
<i>A</i>	2,5	2,9	3,3	250
<i>B</i>	2,8	2,4	3,2	200
<i>C</i>	2,6	3,0	2,4	300
<i>D</i>	2,6	3,1	2,5	350
	310	330	320	

Se trata de calcular el número de botellas que hay que enviar desde cada bodega a cada uno de los mercados con un coste mínimo, de manera que se cumplan las demandas semanales de los mercados y no se superen las capacidades máximas de las bodegas. Explica el significado de los valores óptimos de las variables de holgura utilizadas.

Problemas de personal provocan que o bien la bodega 1 o bien la bodega 2 tengan que reducir su producción de botellas en 130 unidades. ¿Cuál de las dos bodegas debe reducir su producción?

1. [2.5 puntos] Resuelve los siguientes problemas de programación lineal. Si hay más de una solución óptima, calcúlalas todas.

<p>a)</p> $\begin{aligned} \min \quad & 6x_1 + 12x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 18 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 16 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	<p>b)</p> $\begin{aligned} \min \quad & 6x_1 + 2x_2 + 10x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ & -2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 16 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$
---	--

2. [2.5 puntos] Consideremos un problema de programación lineal escrito en forma estándar tal que $b \geq 0$ y $c \geq 0$:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = c^t x, \\ \text{s.a.:} \quad & Ax = b \quad \text{siendo } A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que $\bar{x} = (1, 1, 1, 0, 0)$ es una solución factible básica tal que $z(\bar{x}) = 0$.

Escribe el dual y demuestra que es óptimo. Escribe una solución óptima dual. ¿Es $x = 0$ óptima del primal?

3. [2.5 puntos] Demuestra que uno y sólo uno los siguientes sistemas de restricciones es factible.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 0 \\ -4x_1 + 3x_2 &\leq 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 &< 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\pi_1 - 4\pi_2 &= c_1 \\ 3\pi_1 + 3\pi_2 &= c_2 \\ \pi_1 \geq 0, \pi_2 &\leq 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

4. [2.5 puntos] Una reconocida marca de vinos tiene 4 bodegas repartidas por todo el país. Desde ahí envían sus botellas a 3 mercados. En la tabla se pueden leer los costes de transporte (por botella) desde las bodegas hasta los mercados.

La capacidad de producción de botellas de vino en cada una de las bodegas es distinta. En esa misma tabla podemos leer los datos. También podemos leer en ella las demandas semanales de cada uno de los mercados.

El precio de manipulación del vino y los ingresos por la venta de las botellas no es objeto de este problema. Solo se trata de gastos de transporte.

Bodegas	Mercados			Capacidad
	1	2	3	
<i>A</i>	2,8	2,4	3,2	250
<i>B</i>	2,6	3,0	2,4	300
<i>C</i>	2,6	2,1	2,5	200
<i>D</i>	2,5	2,9	3,3	350
	310	320	310	

Se trata de calcular el número de botellas que hay que enviar desde cada bodega a cada uno de los mercados con un coste mínimo, de manera que se cumplan (igualdades) las demandas semanales de los mercados y no se superen las capacidades máximas de las bodegas. Explica el significado de los valores óptimos de las variables de holgura utilizadas.

Problemas de personal provocan que o bien la bodega 2 o la bodega 3 tengan que reducir su producción de botellas en 130 unidades. ¿Cuál de las dos bodegas debe reducir su producción?