Investigación Operativa
30 de mayo de 2003

1. Teorema fundamental de la programación lineal.

2. Enuncia el teorema de holgura para el siguiente problema de programación lineal.

$$
\begin{array}{cll|l}
\text{Min} & z(x) = cx & & \\
\text{sa} & Ax \geq b & & A \in \mathcal{M}_{mxn} \\
 & x_j \leq 1, & j = 1, \ldots p,\ p < n & \text{rang}(A) = m \\
 & x_j \geq 0, & j = 2, \ldots n &
\end{array}
$$

   Sea x' una solución factible. Probar que x' es óptima si y sólo si existe un vector π' en $\mathcal{R}^m$ tal que se verifican las siguientes afirmaciones:

   a) Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\pi'_i > 0$ se tiene que $\mathring{A}_i x' = b_i$

   b) Para cada $j \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $\bar{c}_j > 0$ se tiene que $x'_j = 0$

   c) Para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\bar{c}_j < 0$ se tiene que $x'_j = 1$

   donde $\bar{c}_j = c_j - \pi' A_j$

3. Consideremos una solución factible no básica de un problema de programación lineal escrito en forma estándar, cuyas coordenadas positivas son las r primeras. Probar que una condición necesaria y suficiente para que esté en un lado acotado es que existan escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, alguno positivo y alguno negativo, tales que $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j A_j = 0$ y existe $u \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\alpha_u \neq 0$ y $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\} \backslash \{A_u\}$ es libre.

4. Una compañía llamada *Gapco* tiene un presupuesto diario de 320 horas de mano de obra y 350 unidades de materia prima para fabricar dos productos. De ser necesario, la compañía puede emplear hasta 10 horas diarias de tiempo extra de mano de obra a un costo adicional de 2 dólares por hora. Se necesitan una hora de mano de obra y tres unidades de materia prima para producir una unidad de producto 1 y, y dos horas de mano de obra y una unidad de materia prima para producir una unidad del producto 2. La utilidad por unidad del producto 1 es de 10 dólares y la del producto 2 es de 12 dólares.

   a) Determina la producción que maximiza la utilidad.

   b) Calcula los precios en la sombra y explica su significado. ¿El 1 y el 3 deberían ser iguales?

   c) Ahora, Gapco paga 2 dólares más adicionales por hora extra. ¿Cuánto es lo más que debe estar dispuesta a pagar la compañía?

   d) Si Gapco quiere adquirir diariamente 100 unidades adicionales de materia prima a 1.5 dólares por unidad, ¿aconsejarías a la compañía que lo hiciera?

   e) Suponiendo que Gapco está experimentando una escasez de materia prima y que no puede adquirir más de 200 unidades al día, determina la solución óptima asociada.

   f) Suponiendo que Gapco no puede utilizar más de 8 horas extra diariamente, encuentra la nueva solución óptima.