UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Departamento de Matemáticas

Campus Universitario
Avenida de Elvas

Badajoz

Investigación Operativa. Enero 2023.

Problemas (si mantienes la nota del parcial, haz sólo el 1.)

1. Al empezar esta semana, un pastelero dispone de harina, azúcar y mantequilla para elaborar diferentes pasteles, los cuales agrupará en tres cajas a las que nos referiremos como A, B y C.

   Cada caja requiere de unas cantidades determinadas de estos ingredientes. Los podemos leer en la tabla. En ella también están detallados los precios de venta y las cantidades disponibles de cada uno de los ingredientes.

	Ingredientes			
Cajas	Harina (kg)	Azúcar (kg)	Mantequilla (kg)	Precio de Venta
A	4	1	1	20
B	6	1/2	1	30
C	2	1	1	18
Disponibilidad	148	23	28	

   Además, se han de elaborar al menos 4 cajas del tipo A.

   Para calcular el beneficio de la venta de los pasteles tendremos en cuenta el coste de los ingredientes utilizados en su elaboración (insisto, sólo de aquellas cantidades utilizadas en la elaboración de los pasteles, pues lo sobrante se utilizará la siguiente semana y no supone una pérdida para el pastelero). Dichos precios son los siguientes: el kg de harina sale a 1'5 €, el de azúcar, a 2 €y el de mantequilla a 4 €.

   a) Plantea un problema de programación lineal que ayude al pastelero a determinar el número de cajas de cada tipo que tiene que elaborar para que el beneficio sea máximo. En el planteamiento, detalla qué significan las variables que empleas. Resuélvelo y explica el significado de los valores óptimos de todas las variables (incluidas las de holgura).

   b) Teniendo en cuenta los precios de los ingredientes, ¿qué convendría más, adquirir 1 kg más de harina, uno de azúcar o uno de mantequilla?

   c) Usando el teorema de holgura, resuelve el problema dual.

2. Resuelve el siguiente problema. Calcula todas las soluciones óptimas.

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\min & 224x_1 & +40x_2 & +\frac{485}{3}x_3 & +100x_4 & -20x_5 & +50x_6 & \\
 & 2x_1 & & +3x_3 & & +2x_5 & & \geq 16 \\
 & x_1 & +3x_2 & & +4x_4 & & -2x_6 & \geq 24 \\
 & & & x_3 & & -x_5 & +x_6 & \geq 0 \\
 & & x_2 & & -3x_4 & & +x_6 & \geq 5 \\
 & x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & -x_5 & & \geq 0 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}
$$

Cuestiones sobre la teoría

Si mantienes la nota del parcial, haz la cuestión 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

Si no, haz tres cuestiones, la 4, la 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

3. Consideremos un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min\ z(x) &= c^t x, \\ \text{s.a.: } Ax &= b \qquad \text{siendo } A \in \mathcal{M}_{2\times 3} \text{ de rango 2} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que el problema es óptimo. Analiza si sería posible obtener otro problema a partir de éste que no fuera óptimo, cambiando sólo el vector de la derecha. (Seguramente tu análisis va a depender de si la solución óptima es única o no).

4. Considera la siguiente forma canónica correspondiente a un problema de programación lineal que consiste en minimizar $z(x) = c_2x_2 + c_3x_3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	a_{11}	a_{12}	3	a_{14}	a_{15}	b_1
x_4	a_{21}	a_{22}	2	a_{23}	a_{25}	2
x_5	a_{31}	-1	1	a_{34}	a_{35}	4
z_{ind}	0	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	0	0	0

Que valores o rango de valores tomarán los coeficientes no definidos si ...:

a) ... la solución asociada a esta forma canónica es óptima.

b) ... el cuadro indica que el problema es no acotado.

c) ... la solución asociada es óptima pero el poliedro de soluciones factibles es no acotado.

5. Se considera un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y por qué.

a) Si el problema es óptimo, entonces $\mathcal{P}$ es acotado.

b) Si este problema tiene una solución óptima con $m+1$ coordenadas no nulas, entonces tiene infinitas soluciones óptimas.

6. Consideremos los sistemas de restricciones:

$$(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq 0, \ c^t x < 0\right\}, \qquad \text{y } (2) = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \ y^t A = c^t, \ y \geq 0\right\}$$

Probad que el sistema (1) es vacío si y sólo si el sistema (2) no lo es.

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Departamento de Matemáticas
Campus Universitario
Avenida de Elvas
Badajoz

Investigación Operativa. Enero 2023.

Problemas (si mantienes la nota del parcial, haz sólo el 1.)

a) Al empezar esta semana, un pastelero dispone de harina, azúcar y mantequilla para elaborar diferentes pasteles, los cuales agrupará en tres cajas a las que nos referiremos como A, B y C.

Cada caja requiere de unas cantidades determinadas de estos ingredientes. Los podemos leer en la tabla. En ella también están detallados los precios de venta y las cantidades disponibles de cada uno de los ingredientes.

Cajas	Ingredientes Harina (kg)	 Azúcar (kg)	 Mantequilla (kg)	Precio de Venta
A	4	1	1	20
B	6	3/4	1	27
C	2	3/4	1	18
Disponibilidad	146	22	28	

Además se han de fabricar al menos 3 cajas de tipo A.

Para calcular el beneficio de la venta de los pasteles tendremos en cuenta el coste de los ingredientes utilizados en su elaboración (insisto, sólo de aquellas cantidades utilizadas en la elaboración de los pasteles, pues lo sobrante se utilizará la siguiente semana y no supone una pérdida para el pastelero). Dichos precios son los siguientes: el kg de harina sale a 1'75 €, el de azúcar, a 2 €y el de mantequilla a 4 €.

1) Plantea un problema de programación lineal que ayude al pastelero a determinar el número de cajas de cada tipo que tiene que elaborar para que el beneficio sea máximo. En el planteamiento, detalla qué significan las variables que empleas. Resuélvelo y explica el significado de los valores óptimos de todas las variables (incluidas las de holgura).
2) Teniendo en cuenta los precios de los ingredientes, ¿qué convendría más, adquirir 1 kg más de harina, uno de azúcar o uno de mantequilla?
3) Usando el teorema de holgura, resuelve el problema dual.

b) Resuelve el siguiente problema. Calcula todas las soluciones óptimas.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 224x_1 & +40x_2 & +100x_3 & +\frac{160}{3}x_4 & +20x_5 & +50x_6 & \\
 & 2x_1 & & +3x_3 & & +2x_5 & & \geq 16 \\
 & x_1 & +3x_2 & & +4x_4 & & -2x_6 & \geq 24 \\
 & & & x_3 & & -x_5 & +x_6 & \geq 0 \\
 & & x_2 & & -3x_4 & & +x_6 & \geq 5 \\
 & x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & -x_5 & & \geq 0
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Cuestiones sobre la teoría

Si mantienes la nota del parcial, haz la cuestión 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

Si no, haz tres cuestiones, la 4, la 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

c) Consideremos un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } z(x) &= c^t x, \\ \text{s.a.: } Ax &= b \qquad\qquad \text{siendo } A \in \mathcal{M}_{2\times 3} \text{ de rango } 2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que el problema es óptimo. Analiza si sería posible obtener otro problema a partir de éste que no fuera óptimo, cambiando sólo el vector de la derecha. (Seguramente tu análisis va a depender de si la solución óptima es única o no).

d) Considera la siguiente forma canónica correspondiente a un problema de programación lineal que consiste en minimizar $z(x) = c_2x_2 + c_3x_3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	a_{11}	a_{12}	3	a_{14}	a_{15}	b_1
x_4	a_{21}	a_{22}	2	a_{23}	a_{25}	2
x_5	a_{31}	-1	1	a_{34}	a_{35}	4
z_{ind}	0	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	0	0	0

Que valores o rango de valores tomarán los coeficientes no definidos si ...:

1) ... la solución asociada a esta forma canónica es óptima.
2) ... el cuadro indica que el problema es no acotado.
3) ... la solución asociada es óptima pero el poliedro de soluciones factibles es no acotado.

e) Se considera un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } z(x) &= c^t x, \\ \text{s.a.: } x &\in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}, \quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \, b \geq 0 \end{aligned}$$

Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y por qué.

1) Si el problema es óptimo, entonces $\mathcal{P}$ es acotado.
2) Si este problema tiene una solución óptima con $m+1$ coordenadas no nulas, entonces tiene infinitas soluciones óptimas.

f) Consideremos los sistemas de restricciones:

$$(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq 0, \ c^t x < 0\right\}, \qquad \text{y } (2) = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \ y^t A = c^t, \ y \geq 0\right\}$$

Probad que el sistema (1) es vacío si y sólo si el sistema (2) no lo es.

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Departamento de Matemáticas

Campus Universitario
Avenida de Elvas

Badajoz

Investigación Operativa. Enero 2023.

Problemas (si mantienes la nota del parcial, haz sólo el 1.)

a) Al empezar esta semana, un pastelero dispone de harina, azúcar y mantequilla para elaborar diferentes pasteles, los cuales agrupará en tres cajas a las que nos referiremos como A, B y C.

Cada caja requiere de unas cantidades determinadas de estos ingredientes. Los podemos leer en la tabla. En ella también están detallados los precios de venta y las cantidades disponibles de cada uno de los ingredientes.

	Ingredientes			
Cajas	Harina (kg)	Azúcar (kg)	Mantequilla (kg)	Precio de Venta
A	4	1	1	18
B	6	3/4	1	22
C	2	3/4	1	17
Disponibilidad	105	22	28	

Además se han de fabricar al menos 3 cajas de tipo A y no más de 15 del tipo C.

Para calcular el beneficio de la venta de los pasteles tendremos en cuenta el coste de los ingredientes utilizados en su elaboración (insisto, sólo de aquellas cantidades utilizadas en la elaboración de los pasteles, pues lo sobrante se utilizará la siguiente semana y no supone una pérdida para el pastelero). Dichos precios son los siguientes: el kg de harina sale a 1'75 €, el de azúcar, a 2 €y el de mantequilla a 4 €.

1) Plantea un problema de programación lineal que ayude al pastelero a determinar el número de cajas de cada tipo que tiene que elaborar para que el beneficio sea máximo. En el planteamiento, detalla qué significan las variables que empleas. Resuélvelo y explica el significado de los valores óptimos de todas las variables (incluidas las de holgura).
2) Teniendo en cuenta los precios de los ingredientes, ¿qué convendría más, adquirir 1 kg más de harina, uno de azúcar o uno de mantequilla?
3) Usando el teorema de holgura, resuelve el problema dual.

b) Resuelve el siguiente problema. Calcula todas las soluciones óptimas.

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\min & \frac{184}{3}x_1 & +40x_2 & +100x_3 & +\frac{160}{3}x_4 & +20x_5 & +50x_6 & \\
 & 2x_1 & & +3x_3 & & +2x_5 & & \geq 16 \\
 & x_1 & +3x_2 & & +4x_4 & & -2x_6 & \geq 24 \\
 & & & x_3 & & -x_5 & +x_6 & \geq 0 \\
 & & x_2 & & -3x_4 & & +x_6 & \geq 5 \\
 & x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & -x_5 & & \geq 0 \\
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Cuestiones sobre la teoría

Si mantienes la nota del parcial, haz la cuestión 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

Si no, haz tres cuestiones, la 4, la 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

c) Consideremos un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } & z(x) = c^t x, \\ \text{s.a.: } & Ax = b \qquad\qquad \text{siendo } A \in \mathcal{M}_{2\times 3} \text{ de rango } 2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que el problema es óptimo. Analiza si sería posible obtener otro problema a partir de éste que no fuera óptimo, cambiando sólo el vector de la derecha. (Seguramente tu análisis va a depender de si la solución óptima es única o no).

d) Considera la siguiente forma canónica correspondiente a un problema de programación lineal que consiste en minimizar $z(x) = c_2x_2 + c_3x_3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	a_{11}	a_{12}	3	a_{14}	a_{15}	b_1
x_4	a_{21}	a_{22}	2	a_{23}	a_{25}	2
x_5	a_{31}	-1	1	a_{34}	a_{35}	4
z_{ind}	0	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	0	0	0

Que valores o rango de valores tomarán los coeficientes no definidos si ...:

1) ... la solución asociada a esta forma canónica es óptima.
2) ... el cuadro indica que el problema es no acotado.
3) ... la solución asociada es óptima pero el poliedro de soluciones factibles es no acotado.

e) Se considera un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } & z(x) = c^t x, \\ \text{s.a.: } & x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}, \quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \ b \geq 0 \end{aligned}$$

Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y por qué.

1) Si el problema es óptimo, entonces $\mathcal{P}$ es acotado.
2) Si este problema tiene una solución óptima con $m+1$ coordenadas no nulas, entonces tiene infinitas soluciones óptimas.

f) Consideremos los sistemas de restricciones:

$$(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq 0, \ c^t x < 0\right\}, \qquad \text{y } (2) = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \ y^t A = c^t, \ y \geq 0\right\}$$

Probad que el sistema (1) es vacío si y sólo si el sistema (2) no lo es.

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
Departamento de Matemáticas
Campus Universitario
Avenida de Elvas
Badajoz

Investigación Operativa. Enero 2023.

Problemas (si mantienes la nota del parcial, haz sólo el 1.)

a) Al empezar esta semana, un pastelero dispone de harina, azúcar y mantequilla para elaborar diferentes pasteles, los cuales agrupará en tres cajas a las que nos referiremos como A, B y C.

Cada caja requiere de unas cantidades determinadas de estos ingredientes. Los podemos leer en la tabla. En ella también están detallados los precios de venta y las cantidades disponibles de cada uno de los ingredientes.

	Ingredientes			
Cajas	Harina (kg)	Azúcar (kg)	Mantequilla (kg)	Precio de Venta
A	4	1	1	20
B	6	1/2	1	24
C	2	1	1	18
Disponibilidad	152	17	30	

Además se han de fabricar al menos 4 cajas de tipo A.

Para calcular el beneficio de la venta de los pasteles tendremos en cuenta el coste de los ingredientes utilizados en su elaboración (insisto, sólo de aquellas cantidades utilizadas en la elaboración de los pasteles, pues lo sobrante se utilizará la siguiente semana y no supone una pérdida para el pastelero). Dichos precios son los siguientes: el kg de harina sale a 1'5 €, el de azúcar, a 2 €y el de mantequilla a 4 €.

1) Plantea un problema de programación lineal que ayude al pastelero a determinar el número de cajas de cada tipo que tiene que elaborar para que el beneficio sea máximo. En el planteamiento, detalla qué significan las variables que empleas. Resuélvelo y explica el significado de los valores óptimos de todas las variables (incluidas las de holgura).
2) Teniendo en cuenta los precios de los ingredientes, ¿qué convendría más, adquirir 1 kg más de harina, uno de azúcar o uno de mantequilla?
3) Usando el teorema de holgura, resuelve el problema dual.

b) Resuelve el siguiente problema. Calcula todas las soluciones óptimas.

$$
\begin{array}{rl}
\min & 224x_1 + 100x_3 + 100x_4 - 20x_5 + 50x_6 \\
& 2x_1 + 3x_3 + 2x_5 \geq 16 \\
& x_1 + 3x_2 + 4x_4 - 2x_6 \geq 24 \\
& x_3 - x_5 + x_6 \geq 0 \\
& x_2 - 3x_4 + x_6 \geq 5 \\
& x_1 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 \geq 0 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{array}
$$

Cuestiones sobre la teoría

Si mantienes la nota del parcial, haz la cuestión 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

Si no, haz tres cuestiones, la 4, la 6 y una a elegir entre la 3 y la 5.

c) Consideremos un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín } z(x) &= c^t x, \\ \text{s.a.: } Ax &= b \qquad\qquad \text{siendo } A \in \mathcal{M}_{2\times 3} \text{ de rango } 2 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que el problema es óptimo. Analiza si sería posible obtener otro problema a partir de éste que no fuera óptimo, cambiando sólo el vector de la derecha. (Seguramente tu análisis va a depender de si la solución óptima es única o no).

d) Considera la siguiente forma canónica correspondiente a un problema de programación lineal que consiste en minimizar $z(x) = c_2x_2 + c_3x_3$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	a_{11}	a_{12}	3	a_{14}	a_{15}	b_1
x_4	a_{21}	a_{22}	2	a_{23}	a_{25}	2
x_5	a_{31}	-1	1	a_{34}	a_{35}	4
z_{ind}	0	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_3$	0	0	0

Que valores o rango de valores tomarán los coeficientes no definidos si ...:

1) ... la solución asociada a esta forma canónica es óptima.
2) ... el cuadro indica que el problema es no acotado.
3) ... la solución asociada es óptima pero el poliedro de soluciones factibles es no acotado.

e) Se considera un problema de programación lineal escrito en forma estándar:

$$\begin{aligned} &\text{mín } z(x) = c^t x, \\ &\quad \text{s.a.: } x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b, \ x \geq 0\}, \quad A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \, b \geq 0 \end{aligned}$$

Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y por qué.

1) Si el problema es óptimo, entonces $\mathcal{P}$ es acotado.
2) Si este problema tiene una solución óptima con $m + 1$ coordenadas no nulas, entonces tiene infinitas soluciones óptimas.

f) Consideremos los sistemas de restricciones:

$$(1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \geq 0, \ c^t x < 0\right\}, \qquad \text{y } (2) = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \ y^t A = c^t, \ y \geq 0\right\}$$

Probad que el sistema (1) es vacío si y sólo si el sistema (2) no lo es.