

EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1. Destilación de crudos. Una compañía de petróleos produce en sus refinerías gasóleo (G), gasolina sin plomo (P) y gasolina súper 97 (S) a partir de dos tipos de crudos, C_1 y C_2 . Las refinerías están dotadas de dos tipos de tecnologías. La tecnología nueva T_n utiliza en cada sesión de destilación 7 unidades de C_1 y 12 de C_2 , para producir 8 unidades de G , 6 de P y 5 de S . Con la tecnología antigua T_a , se obtienen en cada destilación 10 unidades de G , 7 de P y 4 de S , con un gasto de 10 unidades de C_1 y 8 de C_2 .

Estudios de demanda permiten estimar que para el próximo mes se deben producir al menos 900 unidades de G , 300 de P y entre 800 y 1700 de S . La disponibilidad de crudo C_1 es de 1400 unidades y de C_2 de 2000 unidades. Los beneficios económicos por unidad producida son

Producto	G	P	S
Beneficio/u	4	6	7

La compañía desea conocer cómo utilizar ambos procesos de destilación, que se pueden realizar total o parcialmente, y los crudos disponibles para que el beneficio sea máximo.

1.2. Problema de la dieta. En un centro de nutrición se desea obtener la dieta de coste mínimo con unos determinados requisitos vitamínicos para un grupo de niños que van a asistir a campamentos de verano. El especialista estima que la dieta debe contener entre 26 y 32 unidades de vitamina A , al menos 25 unidades de vitamina B y 30 de C , y, a lo sumo, 14 de vitamina D . La siguiente tabla propone el número de unidades de las distintas vitaminas por unidad de alimento consumido para seis alimentos elegidos, denominados 1, 2, 3, 4, 5, 6, así como su coste por unidad

Alimentos	Vitaminas				Coste por unidad
	A	B	C	D	
1	1	1	0	1	10
2	1	2	1	0	14
3	0	1	2	0	12
4	3	1	0	1	18
5	2	1	2	0	20
6	1	0	2	1	16

Se desea construir un modelo de programación lineal para conocer la cantidad de cada alimento que hay que preparar que satisfaga los requisitos propuestos con coste mínimo.

1.3. Producción de gasolinas. Una compañía de petróleos produce tres tipos de gasolinas: Súper, Normal y Euro. Se obtienen por mezcla de tres calidades de crudos (A, B, C) que contienen tres componentes (1, 2, 3). La participación de estos componentes en la composición de cada crudo es

Crudos	Componentes		
	1	2	3
A	80 %	10 %	5 %
B	45 %	30 %	20 %
C	30 %	40 %	25 %

Las especificaciones de los tres tipos de gasolinas son

	1	2	3
Súper	$\geq 60\%$	$\leq 25\%$	$\geq 10\%$
Normal	$\geq 50\%$	$\leq 40\%$	$\leq 25\%$
Euro	$\leq 40\%$	$\geq 35\%$	$\geq 20\%$

Los costes por barril de crudos A, B y C son 65, 50 y 45 euros, respectivamente. El presupuesto diario de compra es de 5 millones de euros; la disponibilidad diaria de crudos B y C se limita, respectivamente, a 3000 y 7000 barriles. Ciertos acuerdos obligan a comprar al menos 2500 barriles de A por día. Las demandas de gasolina Súper y Normal son de 2000 y 2500 barriles diarios, que deben satisfacerse. La compañía desea maximizar la producción de gasolina Euro.

Formular un modelo de programación lineal que dé respuesta al problema planteado por la compañía.

1.4. Elaboración de zumos. Una empresa de alimentación produce zumos de pera, naranja, limón, tomate y manzana, además de otros dos tipos denominados H y G que son combinados de algunos de los anteriores. La disponibilidad de fruta para el periodo próximo, así como los costes de producción y los precios de venta para los zumos, vienen dados en la tabla

Fruta	Disponibilidad máxima (kg)	Coste (euros/kg)	Precio venta (euros/l)
Naranja (N)	32000	0.94	1.29
Pera (P)	25000	0.87	1.25
Limón (L)	21000	0.73	1.1
Tomate (T)	18000	0.47	0.88
Manzana (M)	27000	0.68	0.97

Las especificaciones y precios de venta de los combinados vienen dados en la tabla

Combinado	Especificación	Precio venta (euros/l)
H	No más del 50% de M	1
	No más del 20% de P	
	Al menos el 10% de L	
G	40% de N	1.2
	35% de L	
	25% de P	

La demanda de los distintos zumos es grande, por lo que se espera vender toda la producción. Por cada kg de fruta, se produce un litro del correspondiente zumo. Determinar los niveles de producción de los siete zumos, de manera que se tenga beneficio máximo en el periodo entrante.

1.5. Planificación de la producción. Una empresa produce filtros para monitores de ordenador formados por tres capas, una intermedia de calidad A y otras dos exteriores de calidad B que envuelven a la anterior. Ambas calidades se consiguen con diferentes mezclas de fibra de vidrio y resina de las que el fabricante dispone por semana de 700 y 900 toneladas (t), respectivamente. La empresa posee cuatro plantas de producción que utilizan procedimientos de fabricación que difieren en las cantidades de materia prima que utilizan. Las cantidades necesarias de materia prima por operación para cada planta que se pueden llevar a cabo total o parcialmente, así como el número de capas producidas de uno y otro tipo, se tienen en la tabla

Planta	t requeridas por operación		Capas producidas por operación	
	Vidrio	Resina	Tipo A	Tipo B
1	15	19	2	5
2	14	20	3	7
3	16	15	5	4
4	12	18	4	4

Formular un modelo de programación lineal para determinar el número de operaciones a realizar en cada planta de manera que sea máximo el número total de filtros fabricados.

1.6. Optimización de mezclas en una destilería. Una destilería dispone de malta propia en cantidad de 200 barriles/día. Además, puede comprar malta de dos distribuidores A y B , con costes de 10 y 12 euros/barril, en cantidades máximas de 300 y 500 barriles/día, respectivamente. La malta puede mezclarse directamente o destilarse para producir malta enriquecida de dos tipos 1 y 2. El destilador puede procesar a lo sumo 700 barriles/día. Un barril destilado de la propia casa produce 0.3 barriles de malta 1 y 0.6 de malta 2. Un barril de malta A produce 0.4 de 1 y 0.4 de 2. Uno de malta B produce 0.7 de 1 y 0.1 de 2.

La mezcla de malta no procesada se vende a 13 euros/barril, limitándose el mercado a 110 barriles/día. El sobrante de malta debe destruirse con coste 1 euro/barril. Con las maltas destiladas pueden hacerse dos productos: uno de alta calidad (H), que se vende a 19 euros/barril y debe contener al menos el 70% de producto 1, y otro de baja calidad (L), que se vende a 15 euros/barril y puede contener a lo sumo el 55% de producto 2.

La destilería desea satisfacer la demanda del producto de alta calidad, que es de 215 barriles/día, y asegurarse un beneficio de 300 euros/día. Además, puesto que se espera un cambio en el mercado del producto de baja calidad, la destilería desea minimizar su producción.

Formular un modelo de programación lineal que dé respuesta al problema de planificación planteado teniendo en cuenta las limitaciones en la producción y las exigencias de demanda y beneficio económico, suponiendo, además, que la venta de la mezcla está garantizada.

1.7. Planificación de una planta química. Una planta química fabrica tres sustancias A, B y C, utilizando carbón como materia prima básica. La planta dispone de minas propias que pueden producir hasta 600 u/día de carbón con coste de 20 euros/u. Si la compañía necesita más carbón, puede adquirirlo de un distribuidor con un coste de 50 euros/u. Además, utiliza en el proceso de producción agua, electricidad, gasóleo y mano de obra. La compañía eléctrica suministradora posee el siguiente sistema escalonado de tarifas

- 340 euros/u para las primeras 2000 u (por día)
- 510 euros/u para las primeras 800 u a partir de 2000 u
- 630 euros/u a partir de 2800 u

La compañía de agua carga 70 euros/u de agua utilizada por día hasta 900 unidades y 85 euros/u por encima de 900 unidades. Compra gasóleo a 49 euros/u, pero se restringe por motivos ecológicos al uso de 3000 unidades de gasóleo por día. Utilizando horario normal, la mano de obra disponible es de 750 horas sin coste. Puede conseguir hasta 220 horas extra con coste 152 euros/hora. El resto de los datos del proceso de producción se dan en la siguiente tabla que contiene las unidades necesarias para fabricar cada unidad de sustancia, así como sus precios de venta.

Sust.	Carbón	Electric.	Agua	Gasóleo	Horas	Benef./u (euros)
A	0.6	3.2	1.0	2.0	2.0	2900 para las primeras 85 u 2400 para las posteriores
B	0.9	2.5	0.26	2.4	3.0	3200/u hasta un máximo de 95 u
C	1.2	4.0	1.7	3.0	2.0	3800/u

Formular un modelo de programación lineal que proporcione el plan de producción de beneficio máximo.

1.8. Ajuste lineal. Deseamos ajustar la función lineal

$$\hat{y} = w_1 z_1 + \dots + w_n z_n$$

siendo el problema elegir los pesos w_1, \dots, w_n . Hay m observaciones

$$(y_1, z_{11}, \dots, z_{n1}), \dots, (y_m, z_{1m}, \dots, z_{nm})$$

Se pide:

- a) Formular el problema que proporcione los pesos w_i que minimicen la suma de las desviaciones absolutas entre y e \hat{y} . Reformular el problema como uno de programación lineal.
- b) Ídem. que minimicen la máxima desviación absoluta.

1.9. Control de la producción de alimentos. Un alimento se produce mediante refinado y mezcla de 5 tipos de sustancias líquidas de dos clases: artificiales (a_1, a_2) y naturales (n_1, n_2, n_3). Cada sustancia puede adquirirse para reparto inmediato o futuro. La tabla da los precios (en euros) por tonelada (t) de las sustancias para el primer semestre del año entrante

	a_1	a_2	n_1	n_2	n_3
Enero	130	140	150	130	135
Febrero	150	150	130	110	135
Marzo	130	160	150	120	115
Abril	140	130	140	140	145
Mayo	120	140	170	130	125
Junio	110	120	160	100	155

El precio de venta del producto es de 170 euros por t.

A lo sumo, se pueden refinar 320 t de sustancias artificiales y 350 t de sustancias naturales por mes. El proceso de refinado se realiza sin pérdida de peso y sin coste. Además, se pueden almacenar hasta 1360 t de cada

sustancia para su posterior uso, con coste de almacenamiento de 6 euros por t y mes. No es posible almacenar el alimento ni las sustancias refinadas. Existe, además, una restricción tecnológica sobre la dureza del alimento que debe estar entre 5 y 7 unidades. Se supone que las durezas de las sustancias se mezclan linealmente siendo éstas

$a1$	$a2$	$n1$	$n2$	$n3$
9.5	7.1	3.4	5.2	4.8

Se comienza con un inventario de 730 t de cada sustancia y se desea disponer de ese mismo inventario al final de junio.

Formular un modelo de programación lineal cuya solución dé la política de compra y producción de máximo beneficio, suponiendo que se venden las sustancias refinadas.

1.10. Solución no trivial de un sistema homogéneo. Construir un programa lineal a partir del cual conozcamos si un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con variables no negativas tiene solución distinta de la trivial.

1.11. Factibilidad de un sistema de ecuaciones. Dado un sistema de ecuaciones lineales consistente y con variables estrictamente positivas, formular un programa lineal que permita conocer si tal sistema tiene solución.

1.12. Planificación de la producción e inventarios. Una empresa de productos informáticos fabrica cuatro tipos de discos cuyas demandas se han estimado dentro de unos márgenes mínimos y máximos. Se observan las siguientes características del proceso de producción y su venta:

- Los tiempos necesarios para producir cada tipo de disco son diferentes.
- Las materias primas necesarias para la fabricación son las mismas para todos los discos, siendo éstas cinco. Se conocen los gastos de fabricación por unidad.
- Hay tres suministradores de las materias primas que las venden a distinto precio al fabricante. Éste desea, por razones políticas, comprar a los tres dentro de unos límites mínimos y máximos.
- Hay una capacidad limitada de almacenamiento para las materias primas pero no para los discos fabricados.
- Los costes de fabricación están determinados, básicamente, por los de adquisición de las materias primas y los de mano de obra, ambos conocidos.

Se desea formular un modelo de programación lineal que minimice los costes de fabricación de los discos.

1.13. Problema de corte óptimo. Una fábrica de papel produce bobinas con una medida estándar de 1000 m de longitud y 1 m de ancho. Recibe semanalmente pedidos de diferentes centros de suministro. Para la semana entrante este pedido es de 320 bobinas de 20 cm de ancho, 365 de 30 cm, 480 de 40 cm y 176 de 70 cm (todas con la misma longitud estándar de 1000 m).

El fabricante debe cortar transversalmente las bobinas de 1 m para satisfacer la demanda. Desea fabricar el mínimo número posible de bobinas de 1 m (se supone que los sobrantes se reciclan, por lo que tienen un coste despreciable). Formular un programa lineal que responda a los deseos del fabricante.

1.14. Planificación de personal. Una empresa de seguridad tiene a su servicio la vigilancia de un aeropuerto y debe cubrir las necesidades de personal durante los seis periodos de 4 horas en que está dividido el día, como se muestra en la tabla

Periodo de tiempo	Duración del periodo	Necesidades de personal
1	12 AM – 4 AM	27
2	4 AM – 8 AM	30
3	8 AM – 12 PM	52
4	12 PM – 4 PM	56
5	4 PM – 8 PM	67
6	8 PM – 12 AM	48

Los vigilantes trabajan en turnos de 8 horas seguidas, con 6 cambios posibles de turno a lo largo de las 24 horas, correspondientes a las horas de comienzo y finalización de los periodos en la tabla anterior. El director de personal de la empresa desea conocer cuántos vigilantes deben trabajar en cada periodo de manera que todos queden cubiertos y el total de personal utilizado sea mínimo.